

Problèmes inverses et imagerie : approches statistiques et stochastiques

Le but de ce cours est d'introduire différentes techniques d'analyse stochastique et statistique qui sont utiles en particulier pour résoudre des problèmes inverses et d'imagerie. Dans ces problèmes, on essaie d'identifier les sources, les conditions initiales, ou les coefficients d'une équation aux dérivées partielles (par exemple, l'équation des ondes) à partir de l'observation partielle et bruitée de la solution de l'équation. Les difficultés actuelles dans ce domaine, mais aussi dans d'autres domaines, sont liées au fait qu'on dispose souvent de beaucoup de données, mais pas toujours de bonne qualité.

Dans un problème d'imagerie typique (en échographie par exemple), on souhaite imager un milieu, qui peut être le corps humain en imagerie médicale, ou la croûte terrestre en imagerie sismique. On dispose d'un ensemble de sources qui émettent des ondes et d'un ensemble de récepteurs qui enregistrent les ondes réfléchies par le milieu. Il s'agit de traiter les données enregistrées pour reconstruire le milieu, en construire une image. Malheureusement, d'une part ces problèmes sont souvent mal posés, dans le sens où les seules données expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement le milieu. Il est donc souvent nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de régulariser le problème et de réduire l'espace de recherche. D'autre part, les données expérimentales sont souvent entachées de bruit, qui peut être du bruit de source, du bruit de mesure, ou du bruit de milieu. Le type de bruit conditionne les performances et le choix de la méthode d'imagerie utilisée.

Il se trouve que des idées originales pour traiter ces problèmes inverses sont apparues récemment. Ces idées sont basées sur des outils probabilistes que nous développerons dans ce cours.

Plan :

1) Introduction aux problèmes d'imagerie : détection, localisation, identification de sources ou de réflecteurs.

2) Quelques résultats sur le problème direct : équation des ondes scalaire, fonction et identités de Green.

Application : Expérience de retournement temporel des ondes.

3) Approche par moindres carrés du problème inverse : analyse bayésienne et régularisation de problèmes inverses mal posés.

Application : Imagerie par moindres carrés, imagerie par retournement temporel, tomographie par temps de trajet.

4) Propriétés spectrales des processus aléatoires stationnaires.

Application : Imagerie par corrélations croisées de signaux issus de sources de bruit ambiant.

5) Propriétés des processus gaussiens : statistique des maxima.

Application : Caractérisation du bruit de speckle dans les images.

6) Théorie des matrices aléatoires.

Application : Tests de détection de réflecteurs. Localisation et identification de réflecteurs.

7) Modèles d'Ordre Réduit.

Application : Nouvelles formulations convexes pour l'imagerie.

Pré-requis :

Un minimum de pré-requis en probabilité et statistique est nécessaire, typiquement vecteurs gaussiens et estimation paramétrique.

Déroulement et organisation pratique :

L'UE se compose de 8 cours de 3 heures chacun (cours par zoom ou au tableau) de janvier à mars, plus un cours pour les exposés des étudiants.

Des notes de cours (en anglais) sont distribuées. Voir aussi :

[1] H. Ammari, J. Garnier, W. Jing, H. Kang, M. Lim, K. Solna, and H. Wang, *Mathematical and Statistical Methods for Multistatic Imaging*, Springer, 2013.

[2] J. Garnier and G. Papanicolaou, *Passive Imaging with Ambient Noise*, Cambridge University Press, 2016.

[3] H. Ammari, J. Garnier, H. Kang, L. Nguyen, and L. Seppecher, *Multi-Wave Medical Imaging: Mathematical Modelling and Imaging Reconstruction*, World Scientific, 2017.

[4] L. Borcea, J. Garnier, A. V. Mamonov, and J. Zimmerling, *When data driven reduced order modeling meets full waveform inversion*, 2024.

L'évaluation consiste en un projet réalisé seul ou en binôme, avec remise d'un notebook jupyter (ou d'un rapport écrit et d'un code) et présentation d'un exposé lors du 9ème cours. Le rattrapage éventuel consiste en un nouveau projet (éventuellement lié au projet original) avec remise d'un notebook jupyter (ou d'un rapport écrit et d'un code).