

SIMULATION D'ÉVÉNEMENTS RARES PAR ÉCHANTILLONNAGE PRÉFÉRENTIEL ADAPTATIF POUR DES PROCESSUS DE MARKOV DÉTERMINISTES PAR MORCEAUX

Guillaume CHENNETIER^{1,2} & Hassane CHRAIBI¹ & Anne DUTFOY¹ & Josselin
GARNIER²

¹ *EDF Lab Paris-Saclay, Boulevard Gaspard Monge, 91120 Palaiseau, France.*
guillaume.chennetier@edf.fr; hassane.chraibi@edf.fr; anne.dutfoy@edf.fr

² *CMAP, École Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris, 91120 Palaiseau, France.*
guillaume.chennetier@polytechnique.edu; josselin.garnier@polytechnique.edu

Résumé. On souhaite estimer la probabilité de défaillance de systèmes industriels multi-composants hautement fiables modélisés par des processus de Markov déterministes par morceaux. Pour réduire le nombre de simulations nécessaires par rapport à une méthode de Monte-Carlo standard, nous proposons une méthode d'échantillonnage préférentiel adaptatif par entropie croisée. La paramétrisation de cette méthode, délicate pour des systèmes de grande dimension, repose sur la notion fiabiliste de "chemin minimal".

Mots-clés. PDMP, échantillonnage préférentiel, simulation d'événements rares, entropie croisée, chemins minimaux.

Abstract. We wish to estimate the failure probability of highly reliable multi-component industrial systems modeled by piecewise deterministic Markov processes. To reduce the number of simulations required compared to a standard Monte-Carlo method, we propose an adaptive importance sampling method using cross-entropy. The parameterization of this method, which is delicate for high-dimensional systems, is based on the reliability notion of "minimal path set".

Keywords. PDMP, importance sampling, rare event simulation, cross entropy, minimal path sets.

1 Introduction

La construction et l'exploitation des centrales nucléaires et hydrauliques s'accompagnent d'enjeux majeurs de sûreté. L'entreprise EDF a besoin d'évaluer la fiabilité de systèmes industriels dont la défaillance intervient lorsqu'une ou plusieurs variables physiques continues (température, pression, etc.) dépassent un seuil critique, seuil qui ne peut être atteint qu'après le dysfonctionnement de certains groupes de composants. Ces variables physiques évoluent selon des équations différentielles déterministes qui dépendent de l'état des composants du système, modifié quant à lui à la suite d'événements aléatoires discrets (pannes, réparations, mécanismes de contrôle, etc.).

L'estimation de la probabilité de défaillance repose sur la simulation de trajectoires de processus de Markov déterministes par morceaux modélisant le fonctionnement hybride du système. Ces simulations étant numériquement coûteuses et les systèmes hautement fiables, nous présentons une méthode d'échantillonnage préférentiel capable d'estimer une probabilité de l'ordre de 10^{-6} avec moins de 10^4 simulations.

2 Processus de Markov déterministes par morceaux

Les processus de Markov déterministes par morceaux ou PDMP, introduits par Mark Davis dans [3], sont l'outil idéal pour modéliser des systèmes industriels soumis à des pannes aléatoires. On s'intéresse à des trajectoires de PDMP de durée $t_{\max} > 0$. L'état d'un PDMP à un instant t est noté $Z_t = (X_t, M_t) \in E$ où $X_t \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{d_x}$ est la position et $M_t \in \mathbb{M}$ est le mode du PDMP (avec \mathbb{M} fini ou dénombrable et $E = \mathbb{X} \times \mathbb{M}$). On note pour la suite $\mathbf{Z} := (Z_t)_{t \in [0, t_{\max}]}$.

Flot. Chaque mode $m \in \mathbb{M}$ correspond à un système d'équations différentielles de solution associée ϕ_m . Entre deux sauts, le mode du PDMP reste constant et la position du PDMP suit ϕ_m . Le flot $\Phi_z = \Phi_{x,m} : t \mapsto (\phi_m(x, t), m)$ indique donc en l'absence de saut l'état du processus après un temps t en partant d'un état z .

Sauts déterministes. Si l'espace d'états E a des frontières (notées ∂E), le processus saute lorsqu'il les atteint. On définit pour tout état de départ z le temps déterministe d'atteinte de la frontière $t_z^\partial := \inf\{t > 0 : \Phi_z(t) \in \partial E\}$.

Intensité de saut. Partant d'un état z , le processus peut également sauter à un instant aléatoire $T_z < t_z^\partial$ dont la loi dépend de l'intensité de saut λ . Cette intensité est une fonction qui associe un poids à chaque état : plus ce poids est grand, plus le processus a de chances de sauter en passant par cet état.

$$\mathbb{P}(T_z > t \mid Z_s = z) = \mathbb{1}_{t < t_z^\partial} \exp\left(-\int_0^t \lambda(\Phi_z(u)) du\right). \quad (1)$$

Noyau de saut. Connaissant l'instant du saut et l'état z^- qui précède le saut, l'état d'arrivée après le saut est choisi aléatoirement parmi les autres états par le noyau de saut \mathcal{K}_{z^-} de densité $z \mapsto K(z^-, z)$ par rapport à une certaine mesure ν_{z^-} .

Densité d'une trajectoire. Une mesure dominante par rapport à laquelle une trajectoire de PDMP de durée fixée admet une densité de probabilité a été explicitée dans [1].

En notant n_z le nombre de saut de la trajectoire \mathbf{z} , et (t_k, z_k) les k -èmes temps de saut et état d'arrivée post-saut de la trajectoire pour $k = 1, \dots, n_z$, cette densité peut s'écrire :

$$\pi(\mathbf{z}) = \prod_{k=0}^{n_z} [\lambda(\Phi_{z_k}(t_k))]^{\mathbb{1}_{t_k < t_k^{\partial}}} \times \exp \left[- \int_0^{t_k} \lambda(\Phi_{z_k}(u)) \, du \right] \times \prod_{k=0}^{n_z-1} K(\Phi_{z_k}(t_k), z_{k+1}). \quad (2)$$

On notera par la suite π_0 la distribution du PDMP dont on souhaite estimer la probabilité de défaillance et $P = \mathbb{P}_{\pi_0}(\mathbf{Z} \in \mathbf{D})$ cette probabilité (avec \mathbf{D} le domaine correspondant à l'ensemble des trajectoires défaillantes).

3 Échantillonnage préférentiel adaptatif

L'échantillonnage préférentiel est l'une des méthodes de réduction de variance les plus populaires pour la simulation d'événements rares. On simule nos trajectoires non pas selon la distribution initiale π_0 mais selon une distribution auxiliaire $\tilde{\pi}$ plus susceptible de produire des défaillances et on rectifie le biais en introduisant le bon rapport de vraisemblance. Avec $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \tilde{\pi}$:

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_k \in \mathbf{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z}_k)}{\tilde{\pi}(\mathbf{Z}_k)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}_{\tilde{\pi}} \left[\mathbb{1}_{\mathbf{Z} \in \mathbf{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z})}{\tilde{\pi}(\mathbf{Z})} \right] = \mathbb{E}_{\pi_0} [\mathbb{1}_{\mathbf{Z} \in \mathbf{D}}] = \mathbb{P}_{\pi_0}(\mathbf{Z} \in \mathbf{D}). \quad (3)$$

Processus optimal. La distribution auxiliaire optimale π_{opt} permettant de construire un estimateur de variance nulle existe et correspond à la distribution d'un PDMP dont seuls l'intensité de saut et le noyau de saut diffèrent par rapport au PDMP de distribution π_0 , et que l'on connaît théoriquement [1] :

$$\lambda_{\text{opt}}(\Phi_z(t); s) = \lambda(\Phi_z(t)) \times \frac{U_{\text{opt}}^-(\Phi_z(t), s+t)}{U_{\text{opt}}(\Phi_z(t), s+t)} \quad \text{et} \quad K_{\text{opt}}(z^-, z; s) = K(z^-, z) \times \frac{U_{\text{opt}}(z, s)}{U_{\text{opt}}^-(z^-, s)}. \quad (4)$$

Ici U_{opt} et U_{opt}^- sont des fonctions dites "committor" qui mesurent respectivement la probabilité d'atteindre la défaillance avant la fin de la simulation lorsque le processus se trouve dans un état donné à un instant fixé, et lorsque le processus saute depuis un état donné à un instant fixé :

$$U_{\text{opt}}(z, s) = \mathbb{P}_{\pi_0}(\mathbf{Z} \in \mathbf{D} \mid Z_s = z) \quad \text{et} \quad U_{\text{opt}}^-(z^-, s) = \int_E U_{\text{opt}}(z, s) K(z^-, z) \, d\nu(z). \quad (5)$$

Ainsi la connaissance de U_{opt} est suffisante pour construire le processus optimal. Celle-ci étant hors de portée, on se donne en pratique une famille $(U_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ d'approximations de U_{opt} où $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^{d_{\alpha}}$ et on construit $(\pi_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ des distributions auxiliaires sur le modèle de π_{opt} mais où U_{α} remplace U_{opt} .

Entropie croisée. En suivant l'idée de [5], on note $\alpha_{\text{opt}} \in \mathbb{A}$ le minimiseur de la divergence de Kullback-Leibler entre π_{opt} et π_{α} . La méthode est séquentielle : à l'itération t on simule N_t nouvelles trajectoires selon la loi π_{α_t} pour former un total de $\widetilde{N}_t = \sum_{s=1}^t N_s$ trajectoires. Le prochain itéré $\alpha^{(t+1)}$, un estimateur de P et un estimateur de la variance asymptotique sont alors donnés par les formules suivantes :

$$\alpha^{(t+1)} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \left\{ - \sum_{s=1}^t \sum_{k=1}^{N_s} \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_k^{(s)} \in \mathcal{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z}_k^{(s)})}{\pi_{\alpha^{(s)}}(\mathbf{Z}_k^{(s)})} \log \left[\pi_{\alpha}(\mathbf{Z}_k^{(s)}) \right] \right\}, \quad (6)$$

$$\widehat{P}_{\widetilde{N}_t} = \frac{1}{\widetilde{N}_t} \sum_{s=1}^t \sum_{k=1}^{N_s} \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_k^{(s)} \in \mathcal{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z}_k^{(s)})}{\pi_{\alpha^{(s)}}(\mathbf{Z}_k^{(s)})}, \quad (7)$$

$$\widehat{\sigma}_{\widetilde{N}_t}^2 = \frac{1}{\widetilde{N}_t} \sum_{s=1}^t \sum_{k=1}^{N_s} \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_k^{(s)} \in \mathcal{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z}_k^{(s)})^2}{\pi_{\alpha^{(s)}}(\mathbf{Z}_k^{(s)})^2} - \widehat{P}_{\widetilde{N}_t}^2. \quad (8)$$

Optimalité asymptotique. En utilisant [4], nous avons déterminé des critères suffisants pour assurer la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur (7).

Théorème 1. *Si \mathbb{A} est compact et si de plus :*

1. les fonctions λ , K , et $(U_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ sont bornées inférieurement et supérieurement sur leur support par des constantes strictement positives,
2. il existe $t_{\varepsilon} < 0$ tel que $t_z^{\partial} \geq t_{\varepsilon}$ pour tout $z^- \in \partial E$ et tout $z \in \text{supp } K(z^-, \cdot)$,

alors, en notant $V(\alpha) = \mathbb{E}_{\pi_0} \left[\mathbb{1}_{\mathbf{Z} \in \mathcal{D}} \frac{\pi_0(\mathbf{Z})}{\pi_{\alpha}(\mathbf{Z})} \right] - P^2$, on a :

$$\alpha^{(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s} \alpha_{\text{opt}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\widetilde{N}_t} \left(\widehat{P}_{\widetilde{N}_t} - P \right) \xrightarrow[\widetilde{N}_t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V(\alpha_{\text{opt}})). \quad (9)$$

Intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - a$ pour P . En notant $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$\mathbb{P} \left(P \in \left[\widehat{P}_{\widetilde{N}_t} - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_{\widetilde{N}_t}^2}{\widetilde{N}_t}}; \widehat{P}_{\widetilde{N}_t} + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_{\widetilde{N}_t}^2}{\widetilde{N}_t}} \right] \right) \xrightarrow[\widetilde{N}_t \rightarrow \infty]{} 1 - a. \quad (10)$$

4 Paramétrisation par *chemins minimaux*

On cherche une famille de fonctions $(U_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ qui se comportent comme U_{opt} à une constante multiplicative près. Dans le cas de systèmes multi-composants, de telles fonctions doivent pénaliser les réparations et favoriser les pannes sur les composants clés.

Chemins minimaux du système. Un *chemin* du système est un groupe de composants dont le fonctionnement empêche la défaillance du système quel que soit l'état des autres composants. Un chemin est dit *minimal* s'il ne contient pas d'autre chemin, on abrège MPS pour *minimal path set*. Si le système est *cohérent* (une panne ne peut pas empêcher la défaillance du système et une réparation ne peut pas la causer), alors il existe un nombre $N_{\text{MPS}} > 0$ de MPS et ceux-ci sont uniques. La défaillance du système n'est alors possible que lorsque $\beta^{(\text{MPS})}(z) = N_{\text{MPS}}$ où $\beta^{(\text{MPS})}(z)$ est le nombre de MPS avec au moins un composant cassé. Un bon choix de U_{α} devrait donc être croissant en $\beta^{(\text{MPS})}$.

Famille paramétrique. Nous proposons la forme suivante :

$$U_{\alpha}^{(\text{MPS})}(z, s) = \exp \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N_{\text{MPS}}} \alpha_i \mathbb{1}_{\beta^{(\text{MPS})}(z) \geq i} \right)^2 \right\}, \quad \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{N_{\text{MPS}}}. \quad (11)$$

Quand N_{MPS} est grand, on peut imposer l'égalité de certaines coordonnées de α pour réduire sa dimension effective et simplifier l'étape d'optimisation. La forme $x \mapsto \exp(x^2)$ garantit la croissance stricte des rapports $U_{\alpha}^{-}/U_{\alpha}$ en $\beta^{(\text{MPS})}$ et permet ainsi les pannes en cascade que l'on observe dans des trajectoires défaillantes réalistes.

5 Résultats numériques

La méthode a été testée sur un système décrivant l'évolution d'une piscine de combustible nucléaire usagé inspiré de [2] (voir Figure 1).

Méthode	N	\hat{P}	Intervalle de confiance à 95%
CMC	10^6	2×10^{-6}	$[-7.72 \times 10^{-7}; 4.78 \times 10^{-6}]$
CMC	10^7	3.9×10^{-6}	$[2.67 \times 10^{-6}; 5.12 \times 10^{-6}]$
CMC	10^8	3.50×10^{-6}	$[3.13 \times 10^{-6}; 3.87 \times 10^{-6}]$
IS	10^2	3.15×10^{-6}	$[2.07 \times 10^{-6}; 4.23 \times 10^{-6}]$
IS	10^3	3.17×10^{-6}	$[2.76 \times 10^{-6}; 3.58 \times 10^{-6}]$
IS	10^4	3.39×10^{-6}	$[3.15 \times 10^{-6}; 3.62 \times 10^{-6}]$

TABLE 1 – Monte-Carlo standard (CMC) versus échantillonnage préférentiel (IS).

L'eau de la piscine est chauffée par le combustible entreposé au fond. La défaillance a lieu lorsqu'un volume critique d'eau s'est évaporé. Pour l'éviter, on transfère la température d'une source d'eau froide à l'eau de la piscine via des circuits étanches reliés par des échangeurs de chaleur formant une ligne reliée à une alimentation électrique générale. En secours, le système dispose de deux autres lignes, d'un générateur électrique par ligne et

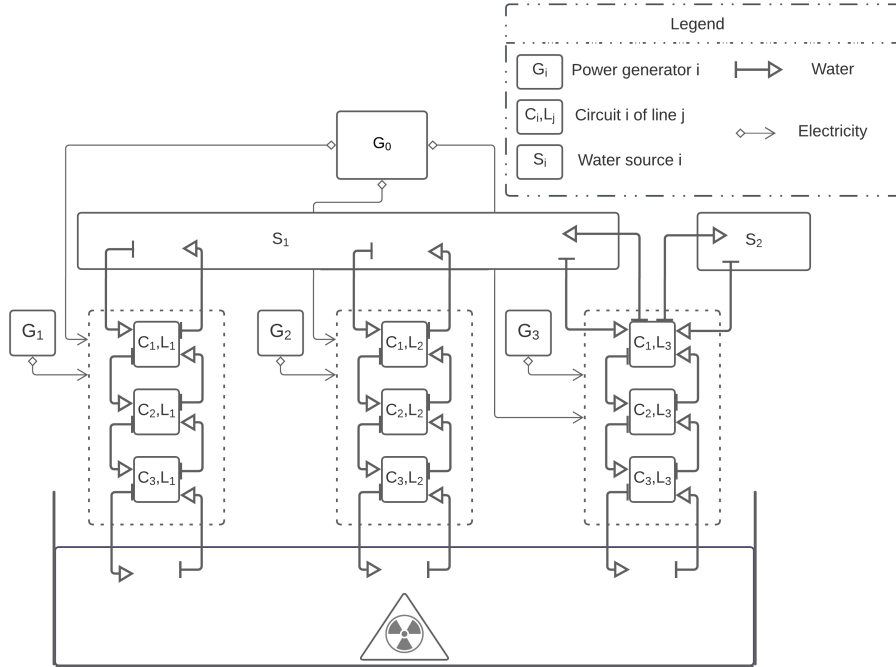


FIGURE 1 – Représentation de la piscine de combustible usagé.

d’une seconde source accessible pour la troisième ligne. Le tableau 1 montre que notre méthode (IS) fait aussi bien sur ce cas test qu’une approche Monte-Carlo standard (CMC) avec 10^4 fois moins de simulations.

Références

- [1] H. Chraïbi, A. Dufloy, T. Galtier et J. Garnier (2019), On the optimal importance process for piecewise deterministic Markov process. *ESAIM : PS.* 23 :893–921.
- [2] H. Chraïbi, J.-C. Houdebine et A. Sibler (2016), PyCATSHOO : Toward a new platform dedicated to dynamic reliability assessments of hybrid systems. *Proceedings PSAM13.*
- [3] M. H. A. Davis (1984), Piecewise-Deterministic Markov Processes : A general class of non-diffusion stochastic models. *J. R. Stat. Soc. B* 46 :353–388.
- [4] B. Delyon et F. Portier (2018), Asymptotic optimality of adaptive importance sampling. *NIPS 2018.*
- [5] R. Rubinstein (1999), The Cross-Entropy method for combinatorial and continuous optimization. *Methodology and Computing in Applied Probability* 1 :127–190.