CONTRÔLE DE CONNAISSANCES
ALÉATOIRE, MAP 311
3 juillet 2017

Durée : 2 heures.
Sujet proposé par B. Jourdain.
Polycopié, copies des transparents et notes de PC autorisées.

Ce sujet est constitué d'un exercice et un problème indépendants. Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour l'utiliser dans la suite.

Exercice : file de voitures (9 points/30)

Sur une route à une seule voie et un seul sens de circulation, on considère une file infinie de véhicules numérotés $0, 1, 2, 3, \ldots$. On suppose qu'ils circulent tous à la même vitesse prise égale à 1. Ils sont séparés par des distances $(L_j)_{j\geq 1}$ comptées de l'arrière du véhicule $j-1$ à l'avant du véhicule j qui suit.
On suppose que pour que le véhicule j s'arrête, il lui faut, à partir du moment où le véhicule $j-1$ qui est devant lui commence à freiner, une distance $R_j + D_j$ où R_j est la distance parcourue pendant le délai de réaction du conducteur du véhicule j et D_j est la distance d'immobilisation de ce véhicule.
On suppose que les triplets $(L_j, R_j, D_j)_{j\geq 1}$ sont i.i.d. avec L_1, D_1 et R_1 indépendantes et positives.

On va étudier les risques de collision lorsqu'un objet encombrant tombe du véhicule 0 en tête de file et empêche la circulation. Pour cela on supposera pour simplifier que :

— lorsqu'un automobiliste freine, il tente d'arrêter son véhicule sur la distance la plus courte possible, peu importe s'il laisse de la place devant lui,

— les vitesses de décélération sont telles que les collisions n'ont lieu qu'entre un véhicule en mouvement et un véhicule arrêté.

On pose $D_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, on note $B_n = \{R_n + D_n < L_n + D_{n-1}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(B_1) \leq \mathbb{P}(B_2)$. Comparer $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(B_3)$.

   Réponse. On a $B_1 = \{R_1+D_1-L_1 < 0\}$, $B_2 = \{R_2+D_2-L_2 < D_1\}$ et $B_3 = \{R_3+D_3-L_3 < D_2\}$. Comme $(R_1, D_1, L_1) \overset{\mathcal{L}}{=} (R_2, D_2, L_2)$ et, par positivité de D_1, $\{R_2 + D_2 - L_2 < 0\} \subset B_2$, $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(R_2 + D_2 - L_2 < 0) \leq \mathbb{P}(B_2)$. Comme $(R_2, D_2, L_2, D_1) \overset{\mathcal{L}}{=} (R_3, D_3, L_3, D_2)$, $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3)$. □

2. Dans cette question, on suppose que R_1, L_1 et D_1 possèdent des densités respectivement notées p_R, p_L et p_D.

(a) Exprimer en fonction de p_R, p_D et $\overline{F}_L(\ell) = \mathbb{P}(\ell < L_1)$ la probabilité pour que le véhicule 1 ne percute pas l'obstacle.

Réponse.

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{E}\left[1_{\{R_1+D_1<L_1\}}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{r+\delta<\ell\}} p_L(\ell) d\ell p_D(\delta) d\delta p_R(r) dr$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_L(r+\delta) p_D(\delta) d\delta p_R(r) dr.$$

□

(b) Calculer cette probabilité lorsque p_R, p_L et p_D sont les densités exponentielles de paramètres respectifs θ_R, θ_L et θ_D.

Réponse. Pour $\ell \geq 0$, $\overline{F}_L(\ell) = e^{-\theta_L \ell}$ si bien que

$$\mathbb{P}(B_1) = \int_0^\infty \theta_R e^{-(\theta_R+\theta_L)r} dr \int_0^\infty \theta_D e^{-(\theta_D+\theta_L)\delta} d\delta = \frac{\theta_R}{\theta_R+\theta_L} \times \frac{\theta_D}{\theta_D+\theta_L}.$$

□

3. Expliquer pourquoi l'événement "les véhicules de 1 à n s'arrêtent sans collision" s'écrit $A_n = \bigcap_{k=1}^n B_k$.

Réponse. Montrons le résultat par récurrence sur n. À partir du moment où l'obstacle tombe du véhicule 0, le véhicule 1, à distance L_1 de cet obstacle, a besoin de la distance $R_1 + D_1$ pour s'arrêter en freinant. Donc l'événement "le véhicule 1 s'arrête sans collision" s'écrit $\{R_1 + D_1 < L_1\} = A_1$. Supposons que pour $n \geq 2$, l'événement "les véhicules de 1 à $n-1$ s'arrêtent sans collision" s'écrive A_{n-1}. Dans le cas où le véhicule $n-1$ ne percute pas son prédécesseur, à partir du moment où il commence à freiner

— il parcourt D_{n-1} avant de s'arrêter,

— le véhicule n, à distance L_n de lui, a besoin de la distance $R_n + D_n$ pour s'arrêter par freinage.

Donc l'événement "les véhicules de 1 à n s'arrêtent sans collision" s'écrit $A_{n-1} \cap B_n = A_n$. □

4. On suppose que $\mathbb{P}(R_1 \geq L_1) > 0$ et on note p cette probabilité.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(D_2 \geq D_1) = \frac{1+\mathbb{P}(D_2=D_1)}{2}$ et que $\mathbb{P}(B_2^c) \geq \frac{p}{2}$.

Réponse. Par sigma-additivité, $1 = \mathbb{P}(D_2 = D_1) + \mathbb{P}(D_2 > D_1) + \mathbb{P}(D_1 > D_2)$ où les deux dernières probabilités sont égales puisque $(D_1, D_2) \overset{\mathcal{L}}{=} (D_2, D_1)$. Donc $\frac{1}{2} = \frac{\mathbb{P}(D_2=D_1)}{2} + \mathbb{P}(D_2 > D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2 \geq D_1) = \mathbb{P}(D_2 = D_1) + \mathbb{P}(D_2 > D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_2=D_1)+1}{2}$. Comme $\{R_2 \geq L_2\} \cap \{D_2 \geq D_1\} \subset \{R_2 + D_2 \geq L_2 + D_1\} = B_2^c$, par indépendance $\mathbb{P}(B_2^c) \geq \mathbb{P}(R_2 \geq L_2)\mathbb{P}(D_2 \geq D_1)$ où le premier facteur est égal à p et le second est minoré par $1/2$. □

(b) Que peut-on dire des événements $(B_{2k})_{k\geq 1}$? En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) = 0$.

Réponse. Les événements $(B_{2k})_{k\geq 1}$ sont indépendants et équiprobables d'après la question 1. Comme $A_{2n} \subset \bigcap_{k=1}^n B_{2k}$, $\mathbb{P}(A_{2n}) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n B_{2k}) = (1 - \mathbb{P}(B_2^c))^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ car $\mathbb{P}(B_2^c) > 0$ d'après la question précédente. □

(c) Conclure qu'il y a presque sûrement au moins un accident.

Réponse. L'événement il n'y a pas d'accident s'écrivant $\bigcap_{k\geq 1} A_k$, il est inclus dans A_{2n} pour tout $n \geq 1$ et donc de probabilité nulle. $\square$

(d) On suppose que D_1 est déterministe égale à d_F. Déterminer la loi de l'indice N du premier véhicule qui n'arrive pas à s'arrêter à temps.
Lorsque $\mathbb{P}(R_1 + d_F < L_1) > 0$, quelle est la loi conditionnelle de $N - 1$ sachant $N \geq 2$?

Réponse. On a alors $B_1 = \{R_1 + d_F < L_1\}$ et $B_k = \{R_k < L_k\}$ pour $k \geq 2$ si bien que les événements $(B_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants. On a $\{N = 1\} = B_1^c$ si bien que $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(R_1 + d_F \geq L_1)$ et pour $n \geq 2$, $\{N = n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \cap B_n^c$ si bien que $\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(R_1 + d_F < L_1)(1-p)^{n-2}p$. Comme $\mathbb{P}(N \geq 2) = \mathbb{P}(R_1 + d_F < L_1)$, lorsque cette probabilité est strictement positive, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N - 1 = n|N \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(N=n+1)}{\mathbb{P}(N\geq 2)} = (1-p)^{n-1}p$. La loi conditionnelle est donc la loi géométrique de paramètre p. $\square$

♦ ♦
♦

Problème : loi de Pareto

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, on appelle loi de Pareto de paramètre (a, b) et on note $\mathcal{P}(a, b)$ la loi de densité $p_1(x, a, b) = \frac{b}{(x-a)^{b+1}} \mathbf{1}_{[a+1,+\infty[}(x)$. On note $X \sim \mathcal{P}(a, b)$ si la variable aléatoire X est distribuée suivant la loi de Pareto de paramètre (a, b). Cette loi est par exemple utilisée pour modéliser la distribution des revenus dans une population.

I) Analyse probabiliste (7 points/30)

Soit $X \sim \mathcal{P}(a, b)$.

1. Montrer que $(X - a)^{-b}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et en déduire sans calcul que $\ln(X - a)$ suit la loi exponentielle de paramètre b.

   Réponse. Pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée,
$$\mathbb{E}[\varphi((X-a)^{-b})] = \int_{a+1}^{\infty} \varphi((x-a)^{-b}) b(x-a)^{-b-1} dx = -\int_1^0 \varphi(u)du = \int_0^1 \varphi(u)du,$$
   en effectuant le changement de variables $u = (x - a)^{-b}$ tel que $du = -b(x - a)^{-b-1}dx$. Comme $\ln(X - a) = -\frac{1}{b}\ln((X - a)^{-b})$, on conclut avec le paragraphe 4.6.2 du polycopié. $\square$

2. À l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{x-a}$ vérifier que
$$\forall c \in]-1, b[,\ \mathbb{E}[(X - (a + 1))^c] = b \int_0^1 (1 - u)^c u^{b-c-1} du.$$

Reconnaître l'intégrale d'une densité usuelle à la constante de normalisation près et en déduire que

$$\forall c \in]-1,b[,\ \mathbb{E}[(X-(1+a))^c] = \frac{\Gamma(b-c)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)}. \tag{1}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler définie par $\forall a>0,\ \Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ qui vérifie $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

Réponse.

$$\mathbb{E}[(X-(1+a))^c] = \int_{a+1}^\infty (x-(a+1))^c b(x-a)^{-b-1}dx = b\int_{a+1}^\infty \left(1-\frac{1}{x-a}\right)^c \frac{1}{(x-a)^{b-c-1}}\frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$\overset{u=1/(x-a)}{=} -b\int_1^0 (1-u)^c u^{b-c-1}du = \frac{\Gamma(b-c)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)}\int_0^1 \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-c)\Gamma(c+1)}u^{b-c-1}(1-u)^c du$$

où la dernière intégrale vaut 1 comme intégrale de la densité $\beta(b-c,c+1)$. □

Les deux questions qui suivent sont indépendantes du reste du problème.
Soient $b,c>0$, $Y\sim\mathcal{P}(0,b)$, $Z\sim\mathcal{P}(0,c)$ et ε une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{c}{b+c}$ indépendantes.

3. Déterminer la densité de $S=\varepsilon Y+\frac{1-\varepsilon}{Z}$.

Réponse. Comme $\varphi(S)=\varepsilon\varphi(Y)+(1-\varepsilon)\varphi(\frac{1}{Z})$, en utilisant la linéarité de l'espérance et l'indépendance des variables aléatoires, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(S)] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[\varphi(Y)]+\mathbb{E}[1-\varepsilon]\mathbb{E}[\varphi(1/Z)] = \frac{c}{b+c}\int_1^\infty \varphi(y)by^{-b-1}dy + \frac{b}{b+c}\int_1^\infty \varphi(1/z)\,cz^{-c+1}\frac{dz}{z^2}$$

$$\overset{s=1/z}{=} \frac{c}{b+c}\int_1^\infty \varphi(y)by^{-b-1}dy + \frac{b}{b+c}\int_0^1 \varphi(s)cs^{c-1}ds = \frac{bc}{b+c}\int_0^\infty \varphi(s)(1_{\{s\le 1\}}s^{c-1}+1_{\{s>1\}}s^{-b-1})ds.$$

Ainsi S a pour densité $\frac{bc}{b+c}(1_{\{0<s\le 1\}}s^{c-1}+1_{\{s>1\}}s^{-b-1})$. □

4. Déterminer la loi de (R,Z) où $R=Y/Z$. Les variables aléatoires R et Z sont-elles indépendantes ? Vérifier que R et S ont même loi.

Réponse. Pour $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mesurable bornée, comme par indépendance de Y et Z le couple (Y,Z) a pour densité le produit de celle de Y par celle de Z,

$$\mathbb{E}[\varphi(R,Z)] = \mathbb{E}[\varphi(Y/Z,Z)] = \int_{z=1}^\infty\int_{y=1}^\infty \varphi(y/z,z)by^{-b-1}dycz^{-c-1}dz$$

$$\overset{r=y/z}{=} \int_{z=1}^\infty\int_{r=1/z}^\infty \varphi(r,z)b(rz)^{-b-1}zdrcz^{-c-1}dz = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(r,z)bc1_{\{z>1,rz>1\}}r^{-b-1}z^{-b-c-1}drdz.$$

Ainsi (R,Z) a pour densité $bc1_{\{z>1,rz>1\}}r^{-b-1}z^{-b-c-1}$ qui ne peut pas se mettre sous forme produit à cause du terme $1_{\{rz>1\}}$ si bien que R et Z ne sont pas indépendantes. La densité marginale de R est donc

$$1_{\{r>0\}}bcr^{-b-1}\int_{\max(1,1/r)}^\infty z^{-b-c-1}dz = 1_{\{r>0\}}bcr^{-b-1}\left[\frac{z^{-b-c}}{b+c}\right]_{\max(1,1/r)}^\infty = \frac{bcr^{-b-1}}{b+c}\left(r^{b+c}1_{\{0<r\le 1\}}+1_{\{r>1\}}\right).$$

On conclut que R et S ont même densité et donc même loi. □

II) Estimation statistique (14 points/30)

On observe une réalisation de $X = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune dans $\{\mathcal{P}(a,b) : a \in \mathbb{R}, b > 0\}$.

5. Soient $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Déterminer la vraisemblance $p_n(x,a,b)$ pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Exprimer à l'aide de $\min_{1\le i\le n} x_i$ la valeur $a_n(x) \in \mathbb{R}$ qui maximise $a \mapsto p_n(x,a,b)$ pour tout $(x,b) \in \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[$.

   Réponse. $p_n(x,a,b) = \frac{b^n}{\prod_{i=1}^n (x_1-a)^{b+1}} 1_{\{a \le \min_{1\le i\le n} x_i - 1\}}$. La fonction $a \mapsto \frac{b^n}{\prod_{i=1}^n (x_1-a)^{b+1}}$ étant positive et strictement croissante sur $]-\infty, \min_{1\le i\le n} x_i[$, $a_n(x) = \min_{1\le i\le n} x_i - 1$. □

6. Calculer la log-vraisemblance $l_n(x,a,b)$. Quelle valeur $b_n(x,a) \in]0,+\infty[$ maximise-t-elle $b \mapsto l_n(x,a,b)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in]a+1,+\infty[^n$ fixés ? En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ du couple (a,b).

   Réponse. Pour $x \in]a+1,+\infty[^n$, $l_n(x,a,b) = n\ln(b) - (b+1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i - a)$. La dérivée partielle $\frac{\partial l_n}{\partial b}(x,a,b) = \frac{n}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i - a)$ s'annule en $b = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i-a)}$.Comme $\frac{\partial^2 l_n}{\partial b^2}(x,a,b) = -\frac{n}{b^2} < 0$, $b_n(x,a) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i-a)}$. On en déduit que l'EMV du couple (a,b) est $(\hat{a}_n, \hat{b}_n) = \left(\min_{1\le i\le n} X_i - 1, \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i - \hat{a}_n)}\right)$. □

7. (a) Calculer $\mathbb{P}_{(a,b)}(X_1 > x)$ pour $x \ge a+1$. En déduire que sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$, $M_n = \min_{1\le i\le n} X_i \sim \mathcal{P}(a, nb)$. Calculer $\mathbb{E}_{(a,b)}(\hat{a}_n - a)$ pour $n > 1/b$. L'EMV est-il sans biais ?

   Réponse. Pour $x \ge a+1$, $\mathbb{P}_{(a,b)}(X_1 > x) = \int_x^\infty b(y-a)^{-b-1}dy = \left[-(y-a)^{-b}\right]_x^\infty = (x-a)^{-b}$. Comme $\{M_n > x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}$, par indépendance, $\mathbb{P}_{(a,b)}(M_n > x) = (\mathbb{P}_{(a,b)}(X_1 > x))^n = (x-a)^{-nb}$. Ainsi sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$, M_n a même fonction de répartition que X_1 au remplacement près de b par nb, si bien que $M_n \sim \mathcal{P}(a, nb)$. Pour $nb > 1$, en utilisant (1), on a $\mathbb{E}_{(a,b)}[\hat{a}_n - a] = \mathbb{E}_{(a,b)}[M_n - (a+1)] = \frac{\Gamma(nb-1)\Gamma(2)}{\Gamma(nb)} = \frac{1}{nb-1}$ si bien que l'EMV est biaisé. □

   (b) À l'aide de l'équation (1), vérifier que $\lim_{n\to\infty} n^3 \mathbb{E}_{(a,b)}[|\hat{a}_n - a|^3] = \frac{6}{b^3}$ et en déduire que $\mathbb{P}_{(a,b)}\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\hat{a}_n - a) = 0\right) = 1$.

   Réponse. $\mathbb{P}_{(a,b)}$ p.s. $\forall i \ge 1$, $X_i > a+1$, et $\forall n \ge 1$, $M_n > a+1$, $|\hat{a}_n - a|^3 = (M_n - (a+1))^3$ et (1) assure que pour $n > 3/b$,

   $$\mathbb{E}_{(a,b)}[|\hat{a}_n - a|^3] = \frac{\Gamma(nb-3)\Gamma(4)}{\Gamma(nb)} = \frac{6}{(nb-1)(nb-2)(nb-3)}.$$

   Ainsi pour $n \to \infty$, $\mathbb{E}_{(a,b)}[|\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)|^3] \sim \frac{6}{n^{3/2}b^3}$. Donc $\infty > \sum_{n>3/b} \mathbb{E}_{(a,b)}\left[|\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)|^3\right] = \mathbb{E}_{(a,b)}\left[\sum_{n>3/b} |\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)|^3\right]$ si bien que $\mathbb{P}_{(a,b)}\left(\sum_{n>3/b} |\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)|^3 < \infty\right) = 1$. Comme le terme général d'une série convergente tend vers 0, $\mathbb{P}_{(a,b)}\left(\lim_{n\to\infty} |\sqrt{n}(\hat{a}_n - a)|^3 = 0\right) = 1$. □

8. On pose $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - \hat{a}_n)$.

(a) À l'aide de la question 1, donner les comportements asymptotiques lorsque $n \to \infty$ sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$ de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)$ et $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)\right)$.

Réponse. D'après la question 1, les variables $\ln(X_i - a)$ sont i.i.d. suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(b)$ d'espérance $1/b$ et variance $1/b^2$ sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$. La loi forte des grands nombres assure que $\mathbb{P}_{(a,b)}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a) \to_{n\to\infty} 1/b\right) = 1$. Le théorème de la limite centrale entraîne que sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$, $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1/b^2)$. □

(b) Avec l'inégalité $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, vérifier que $R_n \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\hat{a}_n - a}{X_i - \hat{a}_n}$. En déduire que $0 \leq R_n \leq \hat{a}_n - a$.

Réponse. L'inégalité entraîne que $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i - a}{X_i - \hat{a}_n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{X_i - a - X_i + \hat{a}_n}{X_i - \hat{a}_n}$. Comme $X_i - \hat{a}_n \geq 1$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\hat{a}_n > a$, on en déduit la majoration de R_n. Sa positivité découle de l'inégalité $\hat{a}_n > a$. □

(c) Montrer que $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ converge $\mathbb{P}_{(a,b)}$ p.s. vers (a, b) lorsque $n \to \infty$.

Réponse. La question précédente et la question 7b entraînent que $\mathbb{P}_{(a,b)}((\hat{a}_n, \sqrt{n}R_n) \longrightarrow_{n\to\infty} (a, 0)) = 1$. Comme $\frac{1}{\hat{b}_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a) - R_n$, avec la question 8a et la continuité de $x \mapsto 1/x$ en $1/b$, on conclut que $\mathbb{P}_{(a,b)}((\hat{a}_n, \hat{b}_n) \longrightarrow_{n\to\infty} (a, b)) = 1$. □

(d) En écrivant que $\sqrt{n}(\hat{b}_n - b) = b\hat{b}_n \times \left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)\right) + \sqrt{n}R_n\right)$, vérifier que $\sqrt{n}(\hat{b}_n - b)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, b^2)$ lorsque $n \to \infty$.

Réponse. Comme sous $\mathbb{P}_{(a,b)}$, $\sqrt{n}R_n$ converge p.s. vers 0 et $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1/b^2)$, le théorème de Slutsky assure que $\sqrt{n}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(X_i - a)\right) + \sqrt{n}R_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ lorsque $n \to \infty$. Comme $b\hat{b}_n$ converge p.s. vers b^2, une nouvelle application du théorème de Slutsky permet de conclure que $\sqrt{n}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{\mathcal{L}} b^2 Z \sim \mathcal{N}(0, b^2)$. □

♦ ♦
♦