Petite Classe 9 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

26 juin 2017 - Salle PC 37

Exercice 1. Sur un échantillon représentatif de 1000 personnes, on rapporte les avis favorables pour un homme politique. En novembre, il y avait 38% d'avis favorables, et 36% en décembre. Un éditorialiste dans son journal prend très au sérieux cette chute de 2 points. Le but de cet exercice est de confirmer ou d'infirmer la position du journaliste.

On note p la proportion d'avis favorables en novembre, et q cette proportion en décembre, et on se propose de test $H_0 : p - q = 0$ contre $H_1 : p - q \neq 0$ au niveau 5%. On note $\widehat{p}_n$ la proportion d'avis favorables dans un échantillon de n personnes en novembre (et de même $\widehat{q}_n$ pour décembre).

1. Démontrer que $\sqrt{n}(\widehat{p}_n - p, \widehat{q}_n - q)$ converge en loi vers un vecteur gaussien dont on précisera la matrice de covariance. En déduire que

$$\sqrt{n}\big(\widehat{p}_n - \widehat{q}_n - (p-q)\big) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad \mathcal{N}(0, p(1-p) + q(1-q)).$$

2. Analyser le comportement de

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{p}_n - \widehat{q}_n)}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n) + \widehat{q}_n(1-\widehat{q}_n)}}$$

sous H_0 et sous H_1.

3. Construire un test de niveau asymptotique α de H_0 contre H_1 en se servant de T_n. Faire l'application numérique.

Exercice 2. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $1/\theta > 0$ avec θ inconnu. Soient $\theta_0 > 0$ et $\alpha \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

On souhaite tester $H_0 = \{\theta = \theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta > \theta_0\}$ au niveau α.

1. Rappeler que S_n suit une loi Γ.

2. Démontrer que sous H_0,

$$Z_n = \frac{2S_n}{\theta_0}$$

suit une loi du χ^2 à un nombre de de degrés de liberté d_n qu'on précisera.

On rappelle qu'une loi du χ^2 à d degrés de liberté est la loi de la somme des carrés de d gaussiennes centrées réduites indépendantes, et qu'une densité de cette loi est

$$\frac{1}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma(d/2)} t^{\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{1}_{t\geq 0}.$$

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a,\lambda)$ est $\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$.

3. En déduire une région critique de la forme

$$W_n = \{S_n \geq c\}$$

avec c une constante qu'on exprimera en fonction de θ_0 et $z_{1-\alpha}$, le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à d_n degrés de liberté.

4. On suppose que θ est le temps moyen d'attente du RER B à la gare de Lozère. Une association d'usagers et la RATP souhaitent tester si le RER B respecte un temps d'attente moyen réglementaire d'au plus $\theta_0 = 15\,\text{min}$. Teste-t-on

$$H_0 = \{\theta \leq \theta_0\} \text{ contre } H_1 = \{\theta > \theta_0\} \qquad \text{ou} \qquad H_0 = \{\theta \geq \theta_0\} \text{ contre } H_1 = \{\theta < \theta_0\}?$$

Exercice 3. La hauteur maximale en mètres de la crue annuelle d'un fleuve est modélisée par une variable aléatoire de Rayleigh de paramètre a qui a pour densité :

$$f(x) = \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

où a est un paramètre inconnu.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a}_n$ de a.

2. Si X suit une loi de Rayleigh de paramètre a, démontrer que X^2 suit une loi exponentielle de paramètre $1/(2a)$.

3. L'estimateur $\widehat{a}_n$ est-il sans biais ?

4. Trouver un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau 95%.

   On rappelle que la variance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $1/\lambda^2$.

5. Une compagnie d'assurance estime qu'une catastrophe correspond à une crue de plus de 6m. Trouver un intervalle de confiance asymptotique pour la probabilité p qu'une catastrophe se produise durant une année au niveau 95%.

Exercice 4. On se place dans le modèle gaussien à espérance et variance égales $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \{\mathcal{N}(\theta, \theta), \theta > 0\}$.

1. Déterminer l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il convergent ?

2. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal et identifier sa variance asymptotique $\sigma^2(\theta)$.

3. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ la moyenne et la variance empiriques et pour $\lambda \in [0,1]$, on pose $T_n^\lambda = \lambda \overline{X}_n + (1-\lambda)\overline{V}_n$. Montrer que T_n^λ est un estimateur convergent et asymptotiquement normal de θ dont on calculera la variance asymptotique $\sigma^2(\lambda, \theta)$. Vérifier que $\min_{\lambda \in [0,1]} \sigma^2(\lambda, \theta) = \sigma^2(\theta)$. Dans la classe des estimateurs $(T_n^\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$, existe-il un estimateur aussi performant que $\hat{\theta}_n$ pour tout $\theta > 0$ en termes de variance asymptotique ?

Pour $\theta_0 > 0$ fixé, on souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 = [0, \theta_0]$ contre l'hypothèse alternative $H_1 =]\theta_0, +\infty[$.

4. Construire un test asymptotique de niveau α à l'aide de $\hat{\theta}_n$.
   A.N.: $\theta_0 = 3{,}8$, $n = 100$, $\overline{x}_n = 4{,}18$, $\overline{v}_n = 3{,}84$, et $\alpha = 0{,}05$.

5. Construire un test asymptotique de niveau α à l'aide de T_n^λ.
   A.N.: $\lambda \in \{0, 0{,}5, 1, \lambda_0\}$ où λ_0 minimise $\lambda \in [0,1] \mapsto \sigma^2(\lambda, \theta_0)$.

Exercice 5. On considère les décimales du nombre π et on souhaite savoir si elles sont uniformément réparties sur $\mathcal{X} = \{0, \ldots, 9\}$. On calcule π à 10^{-n} près, avec $n = 10000$, ce qui nous donne les n premières décimales de π. On trouve $N_0 = 968$, $N_1 = 1026$, $N_2 = 1021$, $N_3 = 975$, $N_4 = 1012$, $N_5 = 1046$, $N_6 = 1021$, $N_7 = 969$, $N_8 = 948$ et $N_9 = 1014$.
Tester l'hypothèse que les décimales de π sont uniformément réparties au niveau 5%.

Exercice 6. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 est de carré intégrable et que $\mathbb{E}(X_1) = 1$. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)}{\sum_{i=1}^n X_i}$.