Petite Classe 7 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

12 juin 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1. (Modèle auto-régressif d'ordre 1 AR(1)). Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et X_0 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m_0,\sigma_0^2)$ indépendante de $(Y_n)_{n\geq 1}$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la suite récurrente aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ par

$$X_n = aX_{n-1} + Y_n.$$

Il s'agit d'un cas particulier de *séries temporelles*, utilisées pour modéliser l'évolution passée d'une quantité pour en prévoir le comportement futur.

1. Montrer que $(X_0,\dots,X_n)$ est un vecteur gaussien.
2. Déterminer la loi de X_n et exprimer $\mathrm{Cov}(X_k,X_n)$ en fonction de $\mathrm{Var}(X_k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Trouver la valeur de c telle que $X_0 + cX_1$ soit indépendant de X_0.
3. A quelle condition la suite (X_n) converge-t-elle en loi ? Quelle est alors la loi limite ? Quelle est la loi de X_n si X_0 a cette loi limite ?
4. Montrer que si $a \in]-1,1[$, le vecteur (X_n,X_{n+1}) converge en loi vers un vecteur gaussien dont on déterminera les paramètres.
5. Pour $a \in]-1,1[$, montrer que la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers $\frac{m}{1-a}$.

Exercice 2. (Estimateurs linéaires) Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable. Trouver l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ de la moyenne $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ qui soit sans biais (c'est-à-dire $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) = \theta$) et de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\widehat{\theta}_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

Exercice 3. On observe un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ inconnu.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n = \theta_n(X_1,\dots,X_n)$ de θ et montrer qu'il converge presque sûrement vers θ lorsque $n \to \infty$.
2. Cet estimateur est-il sans biais ?
   Indication. On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a,\lambda)$ est $\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$.
3. Démontrer que $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers une loi qu'on déterminera.
   Indication. On pourra utiliser la méthode Delta.

Exercice 4. On reprend le modèle AR(1) de l'exercice 1 en supposant maintenant que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (avec σ connu). On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ (inconnu) et on définit la suite récurrente aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ par

$$X_0 = 0, \qquad X_i = \theta X_{i-1} + Y_i, \quad i \geq 1.$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n = \theta_n(X_1,\dots,X_n)$ de θ.

Exercice 5. Une colonie de vampires a élu domicile dans un château des Carpates, et le comte D. souhaite estimer leur nombre. Pour cela, une nuit de pleine lune, le comte en capture 10, leur mord les oreilles, puis les relâche. La nuit suivante, il en capture 10 au hasard. Il constate que trois ont une morsure aux oreilles.
Aidez le comte D. en utilisant un estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 6. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de carré intégrable, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que la moyenne empirique $\overline{X}_n$ et la variance empirique V_n, définies par

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2,$$

sont indépendantes. Le but de cet exercice est de démontrer que la loi de X_i est une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. On suppose dans les questions 1 à 4 que $m = 0$. Calculer $\mathbb{E}((n-1)V_n)$ en fonction de σ^2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $$\mathbb{E}\big((n-1)V_n e^{itn\overline{X}_n}\big) = (n-1)\psi(t)^n\sigma^2,$$

   où on note $\psi(t)$ la fonction caractéristique de X_1.

2. En développant V_n dans l'égalité précédente, vérifier que :

   $$\mathbb{E}\big((n-1)V_n e^{itn\overline{X}_n}\big) = -(n-1)\psi''(t)\psi(t)^{n-1} + (n-1)\psi'(t)^2\psi(t)^{n-2}.$$

3. En déduire que, sur un voisinage ouvert de 0, ψ est solution de l'équation différentielle :

   $$\frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = -\sigma^2, \qquad \psi(0) = 1, \qquad \psi'(0) = 0.$$

4. En déduire que la loi des variables X_i est la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
   Indication : Considérer $\phi = \psi'/\psi$.

5. Que peut-on dire si l'on ne suppose plus $m = 0$?

Exercice 7. Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une fonction (mesurable) bornée. On souhaite calculer $m = \int_0^1 g(x)dx$. On pose $\sigma^2 = \int_0^1 g(x)^2dx - m^2$. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$U = \mathbf{1}_{Y\leq g(X)}, \qquad V = g(X), \qquad W = \frac{g(X) + g(1-X)}{2}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de U, V, W. Comparer les variances de U et V.

2. Proposer trois méthodes de type Monte-Carlo pour calculer m.

On suppose dans la suite que g est monotone.

3. Vérifier que $\mathbb{E}(g(X)g(1-X)) \leq m^2$ et comparer les variances de V et W.

   Indication. On pourra montrer que $(g(x)-g(y))(g(1-x)-g(1-y)) \leq 0$ pour tout $x, y \in [0,1]$.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

4. On considère les estimateurs suivants de m:

$$A_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} g(X_k) \qquad \text{et} \qquad B_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(g(X_k)+g(1-X_k)).$$

   Montrer qu'ils sont sans biais. Lequel possède la plus petite variance ?

5. Dans le cas où $g(x) = x^2$, déterminer le nombre n de simulations nécessaires garantissant une précision relative de 1% sur le calcul de m en erreur quadratique avec A_n et B_n (la précision relative étant $\frac{\mathrm{Var}(A_n)}{m^2}, \frac{\mathrm{Var}(B_n)}{m^2}$).