Petite Classe 6 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

29 mai 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1.

1. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ.
2. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i. Montrer que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$. Ce résultat reste-t-il vrai si les variables aléatoires ne sont plus supposées indépendantes ?

Solution.

1. Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, en appliquant le théorème de transfert,

$$\phi_X(t)=\mathbb{E}(e^{itX})=\sum_{k\geq 0}e^{ikt}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, par indépendance,

$$\mathbb{E}(e^{it(X_1+\cdots+X_n)})=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{itX_k})=\prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k(e^{it}-1)}=e^{(\sum_{k=1}^n\lambda_k)(e^{it}-1)}.$$

   On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

   Ce résultat n'est pas vrai si les variables aléatoires ne sont plus supposées indépendantes lorsque $n>0$. En effet, en prenant $X_n=X_{n-1}=\cdots=X_2=X_1$, avec X_1 suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, on a $\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=1)=\mathbb{P}(X_1=1/n)=0$, donc $X_1+\cdots+X_n$ ne suit pas une loi de Poisson.

Exercice 2. Pour tout $n\geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<n\\ 1 & \text{si } x\geq n.\end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n\geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n dont F_n est une fonction de répartition. Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ?

Solution. La fonction F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à n. Raisonnons par l'absurde, en supposant que X_n converge en loi. Choisissons une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée telle que $f(n)$ n'a pas de limite quand $n\to\infty$ (par exemple $f(x)=\sin(x\pi/2)$). Alors $\mathbb{E}(f(X_n))=f(n)$ n'admet pas de limite quand $n\to\infty$, absurde.

Remarque. Alternativement, on peut uniquement étudier les fonctions de répartition. En raisonnant par l'absurde, supposons que X_n converge en loi vers X. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) \to 0$. Donc $0 = F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x. Or l'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable, donc l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x est dense. Donc, par continuité à droite, on en déduit que $F_X(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, absurde.

Exercice 3. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $n \min(X_1, \dots, X_n)$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

Solution. On calcule la limite de la fonction de répartition de $n \min(X_1, \dots, X_n)$. Pour $y < 0$, on a $\mathbb{P}(n \min(X_1, \dots, X_n) \leq y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on écrit

$$\mathbb{P}\big(n \min(X_1, \dots, X_n) \leq y\big) = 1 - \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^n \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 1 - e^{-y}.$$

Donc la fonction de répartition de $n \min(X_1, \dots, X_n)$ converge en tout point vers celle d'une loi exponentielle de paramètre 1. Donc $n \min(X_1, \dots, X_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n qui a fonction de répartition F_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi, et identifier la loi limite.

Solution. La fonction F_n est croissante, continue, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$, donc il existe une variable aléatoire X_n qui a fonction de répartition F_n. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, X_n converge en loi vers 0 car la fonction de répartition de X_n converge vers la fonction de répartition F de la variable aléatoire constante égale à 0 ($F(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$) en tout point où F est continue (c'est-à-dire $\mathbb{R}^*$).
Remarque. Alternativement, on voit que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \to 0$, donc X_n converge en probabilité et donc en loi vers 0.

Exercice 5. Soit $\theta > 0$. On considère une suite $(T_n)_{n \geq n_0}$ de variables aléatoires où T_n suit une loi géométrique de paramètre $p_n = \theta/n$. Montrer que la suite $(T_n/n)_{n \geq n_0}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Solution. On utilise les fonctions caractéristiques. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_{T_n}(t) &= \mathbb{E}\big(e^{itT_n}\big) = \sum_{k\geq 1} p_n(1-p_n)^{k-1}e^{itk} = p_n e^{it}\sum_{k\geq 0}\big((1-p_n)e^{it}\big)^k = \frac{p_n e^{it}}{1-(1-p_n)e^{it}} \\ &= \frac{p_n}{e^{-it}-(1-p_n)}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\phi_{\frac{T_n}{n}}(t) = \mathbb{E}\big(e^{i\frac{t}{n}T_n}\big) = \frac{\frac{\theta}{n}}{1-i\frac{t}{n}+o(\frac{1}{n})-(1-\frac{\theta}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta}{\theta-it}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une variable exponentielle de paramètre θ. Donc $(T_n/n)_{n\geq n_0}$ converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre θ.

Exercice 6. (Équivalence de la convergence en probabilité et en loi vers une variable aléatoire constante) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c si et seulement si X_n converge en loi vers c.

Indication. Pour la réciproque, on pourra commencer par écrire $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \geq c+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq c-\epsilon)$.

Solution. La convergence en probabilité implique toujours la convergence en loi. Pour la réciproque, supposons que X_n converge en loi vers c et notons F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de la variable aléatoire constante égale à c (ainsi, $F(x) = 0$ si $x < c$ et $F(x) = 1$ si $x \geq c$). Ainsi, pour tout $x \neq c$, $F_n(x) \to F(x)$. D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \epsilon) = \mathbb{P}\big(X_n \geq c+\epsilon \text{ ou } X_n \leq c-\epsilon\big) \leq \mathbb{P}(X_n \geq c+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq c-\epsilon).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n > c+\epsilon/2) + \mathbb{P}(X_n \leq c-\epsilon) = 1 - F_n(c+\epsilon/2) + F_n(c-\epsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 7. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose dans cette question que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

2. (**Lemme de Slutsky**) On suppose que $Y = a$ est constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, a)$ en loi.

   Indications. On pourra utiliser le fait $Y_n \to Y$ en probabilité (exercice 6) et écrire

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \leq\ & |\mathbb{E}(F(X_n,a)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \\ & +\mathbb{E}\big(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n-a|\geq\epsilon\}}\big) \\ & +\mathbb{E}\big(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n-a|<\epsilon\}}\big).\end{aligned}$$

On admettra également que si $\boldsymbol{Z}_n$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, alors $\boldsymbol{Z}_n$ converge en loi vers $\boldsymbol{Z}$ si et seulement si pour toute fonction lipschitzienne bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}\big(f(\boldsymbol{Z}_n)\big) \to \mathbb{E}\big(f(\boldsymbol{Z})\big)$.

3. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

Solution.

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') \to \phi_{(X,Y)}(t,t')$ pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Par indépendance (deux fois), on a

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t') \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \phi_X(t)\phi_Y(t') = \phi_{(X,Y)}(t,t').$$

2. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) \to \mathbb{E}(F(X,Y))$ pour une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lipschitzienne borné. Supposons que $|F(x,y) - F(x',y')| \leq L(|x-x'| + |y-y'|)$ pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. Pour $\epsilon > 0$ fixé, suivons l'indication en majorant $|\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X,a))|$ par

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(F(X_n,a)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \quad &+ \quad \mathbb{E}\big(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n-a|\geq\epsilon\}}\big) \\ &+ \quad \mathbb{E}\big(|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n-a|<\epsilon\}}\big). \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto F(x,a)$ est continue bornée donc le premier terme de cette somme tend vers 0 (car X_n converge en loi vers X). Le deuxième terme est majoré par $2\|F\|_\infty \mathbb{P}(|Y_n - a| > \epsilon)$ qui tend vers 0 (car $Y_n \to a$ en probabilité). Pour le dernier terme, on remarque que

$$|F(X_n,Y_n) - F(X_n,a)|\mathbf{1}_{\{|Y_n-a|<\epsilon\}} \leq L\epsilon.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$|\mathbb{E}(F(X_n,Y_n)) - \mathbb{E}(F(X,a))| \leq 3L\epsilon.$$

Le résultat désiré en découle.

3. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée réduite. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est continue), c'est-à-dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est pas.

Exercice 8. Cet exercice présente un modèle pour la contamination au mercure.

1. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha, \lambda > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_1 > x) \sim \alpha/x^\lambda$ lorsque $x \to +\infty$. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\geq1}$ définie par $Z_n = n^{-1/\lambda}\max(X_1, \ldots, X_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $e^{-\alpha y^{-\lambda}}\mathbf{1}_{y>0}$ (loi de Fréchet de paramètre (α, λ)).

2. Le mercure, métal lourd, est présent dans peu d'aliments. On le trouve essentiellement dans les produits de la mer. L'Organisation Mondiale de la Santé fixe la dose journalière admissible en mercure à $0{,}71\mu g$ par jour et par kilo de poids corporel. Des études statistiques donnent la forme de la queue de distribution empirique de la contamination globale annuelle en gramme de mercure pour un individu de 70 kg : $\mathbb{P}(X > x) = \alpha/x^{\lambda}$ pour x (en gramme) assez grand avec $\alpha = 3{,}54 \cdot 10^{-9}$ et $\lambda = 258$. Seriez-vous étonné–e qu'au moins une personne soit exposée à ce risque sanitaire en France ? à Palaiseau (Recensement 2013 : 31264 personnes) ? Dans une promotion de cinq cents étudiants ? A partir de quelle valeur de n pouvez-vous affirmer : "Parmi ces n personnes, au moins une a un niveau de mercure trop élevé", avec seulement 5% de chances de vous tromper ?

Solution. (Corrigé d'après le livre *Introduction aux probabilités et aux statistiques* de Jean-François Delmas.)

1. On utilise les fonctions de répartition. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(Z_n \leq y) = \mathbb{P}\big(X_1 \leq n^{1/\lambda} y\big)^n.$$

Si $y \leq 0$, $\mathbb{P}(X_1 \leq n^{1/\lambda} y) \leq \mathbb{P}(X_1 \leq 0)^n \to 0$ car $\mathbb{P}(X_1 \leq 0) < 1$. Donc $\mathbb{P}(Z_n \leq y) \to 0$. Si $y \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z_n \leq y) = \Big(1 - \mathbb{P}(X_1 > n^{1/\lambda} y)\Big)^n.$$

Comme $\mathbb{P}(X_1 > n^{1/\lambda} y) \sim \alpha y^{-\lambda}/n$, un développement limité montre que $\mathbb{P}(Z_n \leq y) \to e^{-\alpha y^{-\lambda}}$. La fonction de répartition de Z_n converge donc en tout point vers celle d'une loi de Fréchet de paramètre (α, λ), d'où le résultat.

2. On considère n individus et on note X_k le niveau annuel d'exposition au mercure de l'individu k. On suppose les variables aléatoires X_k indépendantes et de même loi que X. Pour un individu de 70 kg, la dose annuelle admissible fixée par l'OMS est $s = 18{,}14 \cdot 10^{-3}$ g. La probabilité qu'un individu au moins ait un niveau de mercure trop élevé est

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) > s) &= 1 - \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq s) \\ &= 1 - (1 - \alpha s^{-\lambda})^n \\ &\simeq 1 - \exp(-\alpha s^{-\lambda} n). \end{aligned}$$

Si $n_0 = 60\,10^6$ on a $p_{n_0} \simeq 1$; si $n_1 = 31264$ on a $p_{n_1} \simeq 0{,}97$; si $n_2 = 500$ on a $p_{n_2} \simeq 0{,}05$. Enfin, $1 - \exp(-\alpha s^{-\lambda} n) \geq 0{,}95$ si et seulement si $n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\alpha s^{-\lambda}}$, c'est-à-dire $n \geq 27216$.

Exercice 9. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Cauchy. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Étudier les convergences en loi et en probabilité des suites suivantes.

$$(1) \quad \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1} \qquad (2) \quad \left(\frac{S_n}{n^2}\right)_{n \geq 1} \qquad (3) \quad \left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}.$$

Indication. On rappelle que la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy est $\phi(t) = e^{-|t|}$. Pour la troisième suite, on pourra déterminer la loi de $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$, raisonner par l'absurde en supposant que S_n/n converge en probabilité et montrer qu'alors la suite $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Solution.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, par indépendance,
$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\big) = e^{-|t|\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
La fonction caractéristique de $S_n/\sqrt{n}$ converge donc ponctuellement vers une fonction qui n'est pas continue en 0. Donc $S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en loi (et donc pas en probabilité non plus).

2. Comme pour (1), on a
$$\phi_{\frac{S_n}{n^2}}(t) = e^{-\frac{|t|}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Donc la fonction caractéristique de S_n/n^2 converge en tout point vers celle de la fonction constante égale à 0. Donc S_n/n^2 converge en loi vers 0, et donc aussi en probabilité vers 0 d'après l'exercice 6.

3. On a
$$\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = e^{-|t|}$$
ce qui montre que S_n/n suit une loi de Cauchy pour tout $n \geq 1$, donc S_n/n converge en loi vers une loi de Cauchy.

   Montrons maintenant que S_n/n ne converge pas en probabilité. On a
$$\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n} = \frac{X_{n+1} + \cdots + X_{2n}}{2n} - \frac{X_1 + \cdots + X_n}{2n}.$$
On a en utilisant le fait que $\frac{X_{n+1}+\cdots+X_{2n}}{2n}$ et $\frac{X_1+\cdots+X_n}{2n}$ sont indépendants et ont même loi que $S_n/2n$:
$$\phi_{\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}} = \phi_{\frac{S_n}{2n}}(t)^2 = e^{-|t|}.$$
Donc $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ suit une loi de Cauchy. Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que S_n/n converge en probabilité vers une limite X. On a alors, pour tout $\epsilon > 0$,
$$\left\{\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_{2n}}{2n} - X\right| \geq \epsilon/2\right\} \cup \left\{\left|\frac{S_n}{n} - X\right| \geq \epsilon/2\right\},$$
et donc
$$\mathbb{P}\Big(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - X\right| \geq \epsilon/2\Big) + \mathbb{P}\Big(\left|\frac{S_n}{n} - X\right| \geq \epsilon/2\Big).$$
Par passage à la limite,
$$\mathbb{P}\Big(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La suite $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ converge donc en probabilité en 0, et donc en loi vers 0, ce qui est absurde car $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$ suit une loi de Cauchy.

1 Pour aller plus loin

Exercice 10. (**Loi faible, non forte**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2\ln(n+1)n}$. On pose $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

1. Montrer que Y_n converge en probabilité vers 0.
   Indication. On pourra étudier $\mathbb{E}(Y_n^2)$.

2. Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Solution.

1. On a
$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big(X_k^2\big)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k}{2\ln(k+1)}.$$
   Pour montrer que ceci converge vers 0, on fixe $M > 0$ et on écrit
$$n^2\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{k=1}^M \frac{k}{2\ln(k+1)} + \sum_{k=M}^n \frac{k}{2\ln(k+1)} \leq \sum_{k=1}^M \frac{k}{2\ln(k+1)} + \frac{1}{2\ln(M+1)}\sum_{k=1}^n k.$$
   Donc, pour tout $M > 0$, pour tout n assez grand $\mathbb{E}(Y_n^2) \leq \frac{1}{\ln(M)}$. Donc $\mathbb{E}(Y_n^2) \to 0$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(Y_n^2) \to 0$.

2. On a $\sum_{n\geq 2}\mathbb{P}(X_n = n) = \infty$. Donc, d'après le (deuxième) théorème de Borel-Cantelli (les évènements $\{X_n = n\}$ sont indépendants car les variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes), p.s. $X_n = n$ une infinité de fois. Or si Y_n converge, alors $X_n/n \to 0$ p.s. (voir l'exercice 12 de la PC 4). Donc p.s. Y_n diverge.

Exercice 11. Déterminer la limite de $e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra utiliser le théorème central limite.

Solution. On a
$$e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1 + \cdots + P_n \leq n),$$
où $P_1, \ldots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes. On a aussi
$$\mathbb{P}(P_1 + \cdots + P_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \cdots + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$
- La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ étant égale à λ, on a d'après le TCL,
$$\frac{P_1 + \cdots + P_n - n}{\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad N,$$

où N est une variable gaussienne centrée réduite. Or la fonction de répartition de N est continue donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N\leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 12. (Le TCL n'est pas une convergence en probabilité) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^2)<\infty$, et on note $m=\mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2=\mathrm{Var}(X_1)$ et $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)$.

1. Rappeler la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que la suite $(Z_{2n}-Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

   Indication. On pourra écrire $Z_{2n}-Z_n = aZ_n + bZ'_n$ pour $a,b\in\mathbb{R}$ choisis de sorte Z_n et Z'_n soient indépendantes et de même loi.
3. En déduire que si $\sigma^2>0$ alors la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Solution.

1. D'après le TCL, Z_n converge en loi vers σN, où N est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
2. On a

$$Z_{2n}-Z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)Z_n + \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_n \qquad \text{avec} \qquad Z'_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}(X_k-m).$$

   Comme Z'_n est indépendant de Z_n et a la même loi que Z_n, on en déduit que

$$\begin{aligned}\phi_{Z_{2n}-Z_n}(t) = \phi_{Z_n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)u\right)\phi_{Z_n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \quad &\longrightarrow \quad \phi_{\sigma N}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)u\right)\phi_{\sigma N}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)\\ &= \quad \exp\left(-\frac{u^2}{2}\sigma^2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2+\frac{1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

   Donc $Z_{2n}-Z_n$ converge en loi vers $\sigma\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}N$.
3. Soit $\sigma^2>0$ et supposons par l'absurde que Z_n converge en probabilité vers 0. Alors la suite $(Z_{2n}-Z_n)$ converge en probabilité vers 0 (car alors $(Z_n,Z_{2n})\to(0,0)$ en probabilité, qu'on compose par l'application continue $f(x,y)=x-y$). On déduit de la question précédente que $\sigma=0$, absurde.

Exercice 13. (**Sommes aléatoires**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, centrées, de variance 1. On pose $S_n = \sum_{m=1}^n X_m$. Soit $(N_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, toutes indépendantes de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose finalement

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k}.$$

On suppose que $N_k \to \infty$ p.s. lorsque $k \to \infty$. Montrer que Z_k converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Solution. Posons $Y_n = S_n/\sqrt{n}$ et soit $\mathcal{N}$ une variable aléatoire normale centrée réduite. Nous allons montrer que Z_k converge en loi vers $\mathcal{N}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue bornée. Fixons $\epsilon > 0$. D'après le théorème central limite, Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}$. Il existe donc n_0 tel que pour $n \geq n_0$:

$$\big|\mathbb{E}(f(Y_n)) - \mathbb{E}(f(\mathcal{N}))\big| \leq \epsilon.$$

On écrit ensuite:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(Z_k)) &= \mathbb{E}\big(f(Y_{N_k})\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\big(f(Y_j)\mathbf{1}_{\{N_k=j\}}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_k = j)\mathbb{E}(f(Y_j)) \qquad \text{par indépendance de } N_k \text{ et } Y_j
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(f(Z_k)) - \mathbb{E}(f(\mathcal{N}))| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_k = j)\,|\mathbb{E}(f(Y_j)) - \mathbb{E}(f(\mathcal{N}))| \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(N_k \leq n_0) + \sum_{j\geq n_0} \mathbb{P}(N_k = j)\,|\mathbb{E}(f(Y_j)) - \mathbb{E}(f(\mathcal{N}))| \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(N_k \leq n_0) + \sum_{j\geq n_0} \mathbb{P}(N_k = j)\epsilon \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(N_k \leq n_0) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Or N_k converge presque sûrement vers $+\infty$ et donc en probabilité. Le premier terme de la dernière somme converge donc vers 0. On en déduit que $|\mathbb{E}(f(Z_k)) - \mathbb{E}(f(\mathcal{N}))| \leq 2\epsilon$ pour k suffisamment grand, ce qui conclut.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = 0, \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{c}{|k|^2 \ln|k|} \quad \text{pour } |k| \geq 1,$$

avec $c = \frac{1}{2}(\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2 \ln k})$. Montrer que $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que X n'est pas intégrable.

Solution. On calcule aisément

$$\phi(t) = \sum_{|k|\geq 2}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)e^{ikt} = \sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(X=k)(e^{ikt}+e^{-ikt}) = 2c\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(tk)}{k^2 \ln k}.$$

Si la somme était une intégrale par rapport à k, on aurait fait une intégration par parties pour "renforcer la convergence". Dans notre cas, nous allons faire une transformation d'Abel, qui est l'équivalent discret de l'intégration par parties. Posons donc $a_k = \frac{1}{k^2 \ln k}$, $b_k(t) = \cos(tk)$, $A_N = \sum_{k=2}^N a_k$ et $B_N(t) = \sum_{k=2}^N b_k(t)$ pour $N \geq 2$, avec $B_1(t) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} a_k b_k(t) &= \sum_{k=2}^{N} a_k (B_k(t) - B_{k-1}(t)) = \sum_{k=2}^{N} a_k B_k(t) - \sum_{k=2}^{N-1} a_{k+1} B_k(t) \\
&= a_N B_N(t) - \sum_{k=2}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) B_k(t).
\end{aligned}$$

En calculant, on trouve que

$$a_{k+1} - a_k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{2}{\ln(1/k)k^3} \qquad \text{et} \quad B_N(t) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{1}{2}(2N+1)t\right) - \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right).$$

Ainsi,

$$\phi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) B_k(t).$$

Par ailleurs, on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup_t |B_k'(t)| \leq Ck$ pour tout $k \geq 2$. Donc la série de terme général $|a_{k+1} - a_k| \sup_t |B_k'(t)$ converge. Donc ϕ est dérivable d'après le théorème de dérivation sous le signe somme.