Petite Classe 5 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

22 mai 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$, et soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par
$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$
Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1. Est-ce que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité ? Est-ce que la suite (Z_n) converge presque sûrement ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence
$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\lambda}$$
a lieu en probabilité.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha > 0$. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 4. (Lemme de Scheffé) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires **positives** qui convergent presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}(X) < \infty$ et que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$. Le but de cet exercice est de démontrer que $X_n \to X$ dans L^1.

On pose $Y_n = \min(X_n, X)$ et $Z_n = \max(X_n, X)$.

1. Démontrer que $\mathbb{E}(Y_n) \to \mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Démontrer que $\mathbb{E}(Z_n) \to \mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

   Indication. On pourra écrire que $Z_n = X + X_n - Y_n$.
3. Conclure que $\mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

   Indication. On pourra écrire que $|X_n - X| = Z_n - Y_n$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $k \geq 1$ un entier. On pose $S_0 = k$ et pour tout $n \geq 1$
$$S_n = k + X_1 + \cdots + X_n.$$
Soit $T = \inf\{i \geq 1 : S_i = 0 \text{ ou } S_i = 2k\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

1. Montrer que $T < \infty$ presque sûrement.

2. On pose $Z_n = S_{\min(n,T)}$. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi. Est-ce que Z_n converge en probabilité ? En moyenne ?

Exercice 6. (**Problème du collectionneur**) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.
Motivation : Votre petit frère collectionne les images des joueurs de la coupe du monde que l'on trouve dans les tablettes de chocolat. On suppose qu'il existe n images différentes, et qu'elles sont équitablement distribuées dans l'ensemble des tablettes (que l'on supposera infini). T_n est le nombre de tablettes qu'il faut acheter pour avoir toutes les images de la collection.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

2. En déduire que la convergence $\frac{T_n}{n \log n} \to 1$ a lieu en probabilité.

   Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.

Exercice 7. (**Biais par la taille**) On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes de même loi sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m = \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k\geq 1} kp_k < \infty$ avec $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(T = k)$ converge vers $\frac{k}{m}p_k$ lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(T = k|X_1, \ldots, X_n)$.

Pour aller plus loin

Exercice 8. (Extension du théorème de convergence dominée) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que X_n converge en probabilité vers X. On suppose qu'il existe une variable aléatoire positive et intégrable Z, indépendante de n, telle que $|X_n| \leq Z$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X_n converge vers X en moyenne.
Indication. On pourra utiliser que si Y_n converge en probabilité vers Y alors il existe une sous-suite de Y_n qui converge presque sûrement vers Y.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers X et soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers Y. Montrer que (X_n, Y_n) converge en probabilité vers (X, Y).

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. On suppose que $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que X et Y ont la même loi.
Indication. Utiliser le théorème de Weierstrass sur la densité des polynômes.

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ telle que X_n/c_n converge presque sûrement vers 0.

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi.

1. Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que $\alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}(X) < \alpha \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) + \alpha$.

   Indication. On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

4. En déduire la dichotomie suivante : presque sûrement,

$$\text{la plus grande valeur d'adhérence de } \frac{X_n}{n} \text{ vaut } \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}(X_1) < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}(X_1) = \infty \end{cases}.$$

Exercice 13. La convergence de l'exercice 2 a-t-elle lieu presque sûrement ? Dans L^1 ?