

Petite Classe 4 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

15 mai 2017 - salle PC n° 16

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose

$$Y = X\mathbf{1}_{\{|X| < a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X| \geq a\}}$$

Montrer que Y est une v.a. normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha, \lambda)$ et $\Gamma(\alpha + 1/2, \lambda)$, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $(V, W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$. Déterminer la loi de (V, W) .

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est (c.f. Section 4.6.3 du poly)

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}, \quad \text{avec} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1} e^{-z} dz.$$

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur \mathbb{R}^2 tel que :

- X suit une loi $\Gamma(2, \lambda)$ (de densité $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$),
- la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur le segment $[0, X]$ (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{0 < y < x}$).

1. Déterminer la densité de (X, Y) ainsi que la loi de Y .
2. Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y .
3. Calculer les quantités suivantes:
 - (a) $\mathbb{E}(Y|X)$,
 - (b) $\mathbb{E}(X|Y)$,
 - (c) $\mathbb{E}(X + XY|Y)$,
 - (d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$,
 - (e) $\mathbb{E}(XY)$ (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{E}(X^2) = \frac{6}{\lambda^2}$).

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur \mathbb{R}^2 . On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X).$$

2. Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}(h(X, Y)|X) = \Phi(X)$, avec

$$\Phi(x) = \mathbb{E}(h(x, Y)).$$

Exercice 5. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ avec $n \geq 2$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Identifier la loi de S_n comme une loi classique.
2. Trouver la densité conditionnelle de X_1 sachant que $S_n = t$.
3. En déduire la valeur de l'espérance conditionnelle de X_1 sachant S_n . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 6. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
2. Quelle est la loi de (X_1, X_2) ?
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(X_2, X_2 + aX_1)$ est un vecteur gaussien.
4. En choisissant a de sorte que X_2 et $X_2 + aX_1$ soient indépendants, calculer $\mathbb{E}(X_1|X_2)$.

Exercice 7. (Simulation d'une loi de Poisson) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme, et soit $\lambda > 0$. On pose $E_n = -\ln(U_n)/\lambda$ pour tout $n \geq 1$ et

$$T_n = E_1 + \dots + E_n.$$

1. Identifier la loi de $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$, puis la loi de T_n comme une loi classique.
2. On pose $N = \min\{n \geq 0 : U_1 U_2 \dots U_{n+1} < e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 8. (Pale 2014) On considère le jeu de la courte paille entre deux joueurs. Une troisième personne choisit un bâton puis elle le coupe en deux. Elle présente alors les deux morceaux aux joueurs en cachant la différence de longueur dans sa main. Le premier joueur choisit un morceau et le second prend l'autre. Celui qui a le morceau le plus long gagne. La longueur U du bâton est supposée suivre la loi uniforme sur $[0, 1]$ et les deux morceaux finaux ont pour longueur $X = UV$ et $Y = U(1 - V)$ avec V de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de U .

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Donner la loi de $-\ln(U)$. En déduire sans calcul que $\xi = -\ln(X)$ suit la loi $\Gamma(2, 1)$. Déterminer la loi de X .
3. Quelle est la loi de (X, Y) (faire attention au domaine image du changement de variables) ? Les longueurs des morceaux sont-elles indépendantes ? Comparer les lois de (Y, X) et de (X, Y) . Le jeu est-il équitable ? Retrouver la densité de X .

Pour aller plus loin

Exercice 9. (Réarrangement croissant de lois exponentielles) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On considère des variables aléatoires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes telles que E_k suit une loi exponentielle de paramètre λ_k . On note

$$E_{(1)} \leq E_{(2)} \leq \dots \leq E_{(n)}$$

les variables aléatoires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ réarrangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que $E_{(1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(E_{(1)} < E_{(2)}) = 1$ (ainsi le minimum des variables est atteint une unique fois presque sûrement).
3. On note $N = \min\{1 \leq i \leq n : E_i = E_{(1)}\}$. Montrer que N et $E_{(1)}$ sont indépendants, et que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 10. (Processus de Poisson) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n -uplet (T_1, \dots, T_n) .
2. En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.
3. Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du n -uplet (T_1, \dots, T_n) sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.