# Petite Classe 3 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

**Josselin Garnier**

10 mai 2017 - salle PC n$^o$ 16

**Exercice 1.** Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(U)$.

**Solution.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Comme $f(\sin(U))$ est bornée, elle admet une espérance, et on peut donc utiliser le théorème de transfert:

$$\mathbb{E}\big(h(\sin(U))\big) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(\sin(x))dx.$$

On a envie de faire le changement de variable $u = \sin(x)$, mais attention: sin n'est pas injective sur $[0, \pi]$. On se restreint donc à $[0, \pi/2]$, et en faisant le changement de variable $u = \sin(x)$ (et donc $x = \arcsin(u)$, $dx = du/\sqrt{1-u^2}$):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} h(\sin(x))dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 h(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

On en déduit que $\sin(U)$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée au point $u$ par

$$\frac{2}{\pi\sqrt{1-u^2}} \mathbf{1}_{0<u<1}.$$

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ une variable aléatoire indépendante de $X$ telle que telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$.

**Solution.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée.

$$\mathbb{E}\big(h(Z)\big) = \mathbb{E}\big(h(Z)\mathbf{1}_{Y=1}\big) + \mathbb{E}\big(h(Z)\mathbf{1}_{Y=-1}\big) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(h(X)\big) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(h(-X)\big) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-|x|} dx$$

Donc $Z$ est à densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

**Exercice 3.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p$. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

**Solution.** On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (ou partition) $(\{Y = k\} : k \geq 1)$:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X > Y, Y = k).$$

Or on a l'égalité des événements $\{X > Y, Y = k\} = \{X > k, Y = k\}$. Donc, en utilisant l'indépendance de $X$ et $Y$:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X > k, Y = k) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda k} p(1-p)^{k-1}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X > Y) = pe^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \left(e^{-\lambda}(1-p)\right)^{k-1} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)} = \frac{p}{e^{\lambda} + p - 1}$$

**Exercice 4.** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbf{1}_{x,y\geq 0}.$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
3. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?

**Solution.**

1. $f_{(X,Y)}$ est bien positive, vérifions que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ vaut bien 1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\ \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbf{1}_{x,y\geq 0} &= \int_0^{\infty} dy \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x(1+y^2)} dx \\
&= \int_0^{\infty} dy \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} \\
&= \frac{2}{\pi} [\arctan(y)]_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On calcule $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(Y))$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\ h(x) \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbf{1}_{x,y\geq 0} \\
&= \int_0^{\infty} dx\ h(x) \frac{2e^{-x}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xy^2} dy \\
&= \int_0^{\infty} dx\ h(x) \frac{2e^{-x}}{\pi\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \qquad \text{(en posant } z = \sqrt{x}y) \\
&= \int_0^{\infty} dx\ h(x) \frac{2e^{-x}}{\pi\sqrt{x}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $X$ est à densité, et $f_X(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \mathbf{1}_{x\geq 0}$ est une densité de $X$.

Aussi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\ h(y)\frac{2}{\pi}e^{-x(1+y^2)}\mathbf{1}_{x,y\geq 0} \\
&= \int_0^{\infty} dy\frac{2}{\pi}h(y)\int_0^{\infty} e^{-x(1+y^2)} \\
&= \int_0^{\infty} dy\frac{2}{\pi}h(y)\frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Donc $Y$ est à densité, et $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\mathbf{1}_{y\geq 0}$ est une densité de $Y$.

3. $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si pour presque tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, ou encore, pour tous $x, y \geq 0$,

$$e^{x(1+y^2)} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}\frac{1}{1+y^2},$$

ce qui n'est clairement pas le cas. Donc $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

Remarque. Le *clairement pas* met des choses sous le tapis... Justifions cela. Tout d'abord, si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue nulle presque partout (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$), alors en fait $g$ est nulle partout. En effet, raisonnons par l'absurde et choisissons $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x) \neq 0$. Alors il existe une boule ouverte $B_x$ centrée en $x$ telle que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in B_x$. Or $B_x$ est de mesure de Lebesgue strictement positive, absurde.

Dans notre cas, supposons par l'absurde que pour presque tous $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ on a

$$e^{-x(1+y^2)} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}\frac{1}{1+y^2}.$$

La fonction continue $g(x, y) = e^{-x(1+y^2)} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}\frac{1}{1+y^2}$ est donc presque partout nulle, et donc partout nulle. Or $g(1, 0) \neq 0$, absurde.

**Exercice 5.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Identifier la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

**Solution.** Soit $Z = \min(X, Y)$. Calculons $\mathbb{P}(Z > u)$ pour $u \in \mathbb{R}$. Si $u < 0$, on a $\mathbb{P}(Z > u) = 1$. Si $u \geq 0$, on a, par indépendance de $X$ et de $Y$:

$$\mathbb{P}(Z > u) = \mathbb{P}(X > u, Y > u) = \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > u) = e^{-\lambda u}e^{-\mu u} = e^{-(\lambda+\mu)u}.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)u} & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$, et comme la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle, on en déduit que $Z$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

**Exercice 6.** Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose

$$S = \frac{n+1}{n} \max(U_1, \ldots, U_n).$$

Calculer l'espérance et la variance de $S$.

**Solution.** Pour effectuer ces calculs, on va montrer que $S$ est à densité en calculant sa fonction de répartition. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'indépendance de $U_1, \ldots, U_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \leq x) &= \mathbb{P}\Big( \max(U_1, \ldots, U_n) \leq \frac{nx}{n+1} \Big) = \mathbb{P}\Big( U_1 \leq \frac{nx}{n+1}, \ldots, U_n \leq \frac{nx}{n+1} \Big) \\ &= \mathbb{P}\Big( U_1 \leq \frac{nx}{n+1} \Big)^n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(S \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left( \frac{nx}{(n+1)\theta} \right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n+1}{n}\theta \\ 1 & \text{si } x > \frac{n+1}{n}\theta. \end{cases}$$

La fonction de répartition de $S$ est donc continue, dérivable sauf éventuellement en 0 et en 1, donc $S$ est à densité. Une densité $f$ de $S$ est donnée par la dérivée de sa fonction de répartition aux points où elle est dérivable, donc

$$f(x) = \left( \frac{n}{(n+1)\theta} \right)^n n x^{n-1} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq \frac{n+1}{n}\theta}$$

est une densité de $f$.

On calcule ensuite, en utilisant le théorème de transfert:

$$\mathbb{E}(S) = \left( \frac{n}{(n+1)\theta} \right)^n n \int_0^{\frac{n+1}{n}\theta} x x^{n-1} dx = \left( \frac{n}{(n+1)\theta} \right)^n n \frac{1}{n+1} \left( \frac{n+1}{n}\theta \right)^{n+1} = \theta.$$

De même,

$$\mathbb{E}(S^2) = \left( \frac{n}{(n+1)\theta} \right)^n n \int_0^{\frac{n+1}{n}\theta} x^2 x^{n-1} dx = \left( \frac{n}{(n+1)\theta} \right)^n n \frac{1}{n+2} \left( \frac{n+1}{n}\theta \right)^{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2.$$

Donc la variance de $S$ vaut

$$\mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = \theta^2 \left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1 \right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

**Exercice 7.** (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit $X$ une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbf{1}_{X > \lambda \mathbb{E}(X)}$.

2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in ]0,1[$ on a

$$\mathbb{P}\big(X > \lambda\mathbb{E}(X)\big) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

**Solution.**

1. On distingue deux cas. Si $X > \lambda\mathbb{E}(X)$, alors $\mathbf{1}_{X>\lambda\mathbb{E}(X)} = 1$ et
$$\lambda\mathbb{E}(X) + X\mathbf{1}_{X>\lambda\mathbb{E}(X)} = \lambda\mathbb{E}(X) + X \geq X.$$
Si $X \leq \lambda\mathbb{E}(X)$, alors
$$X \leq \lambda\mathbb{E}(X) \leq \lambda\mathbb{E}(X) + X\mathbf{1}_{X>\lambda\mathbb{E}(X)}.$$

2. On prend l'espérance de l'inégalité de la question précédente:
$$\mathbb{E}(X) \leq \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{X>\lambda\mathbb{E}(X)}\big).$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{X>\lambda\mathbb{E}(X)}\big) \leq \mathbb{E}(X^2)^{1/2}\mathbb{E}\big(\mathbf{1}^2_{X>\lambda\mathbb{E}(X)}\big)^{1/2} = \mathbb{E}(X^2)^{1/2}\mathbb{P}\big(X > \lambda\mathbb{E}(X)\big)^{1/2}.$$
Donc
$$(1-\lambda)^2\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}\big(X > \lambda\mathbb{E}(X)\big)$$
et le résultat voulu en découle immédiatement.

Remarque. L'inégalité de Markov permet de majorer $\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}(X))$, alors que l'inégalité de Paley-Zygmund permet de minorer cette quantité.

**Exercice 8** (La cerise sur le gâteau)**.** On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1. Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que l'autre part ?

2. Quelle est la taille (i.e. la longueur angulaire) moyenne de la part contenant la cerise ?

**Solution.**
*1.* On mesure les angles par rapport à la position de la cerise. Le découpage se fait selon deux angles $\theta_1$ et $\theta_2$ tirés uniformément sur $]0, 2\pi[$. La part contenant la cerise mesure $2\pi-(\theta_2-\theta_1)$ si $\theta_2 > \theta_1$ et $2\pi - (\theta_1 - \theta_2)$ si $\theta_2 \leq \theta_1$. Donc cette part mesure $2\pi - |\theta_2 - \theta_1|$.

*1.* La probabilité que la part contenant la cerise soit la plus grande est :

$$\begin{aligned}
p &= \mathbb{P}\left(|\theta_2-\theta_1| < \pi\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{|\theta_2-\theta_1|<\pi} d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_{\theta_1}^{2\pi} \mathbf{1}_{|\theta_2-\theta_1|<\pi} d\theta_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi-\theta_1} \mathbf{1}_{\theta_2<\pi} d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \min(2\pi-\theta_1, \pi) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\int_0^{\pi} d\theta_1 \pi + \int_\pi^{2\pi} d\theta(2\pi-\theta_1)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot
\end{aligned}$$

La probabilité que la part contenant la cerise soit la plus grande est donc 3/4.

*2.* On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\theta_2-\theta_1|\right] &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\theta_2-\theta_1|d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_{\theta_1}^{2\pi}|\theta_2-\theta_1|d\theta_2\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi-\theta_1}\theta_2 d\theta_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\theta_1\frac{(2\pi-\theta_1)^2}{2}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left(8\pi^3-4\pi\frac{(2\pi)^2}{2}+\frac{(2\pi)^3}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

La part contenant la cerise a une taille moyenne est donc de $2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3$. Notez, pour les gourmands, que la part moyenne est supérieure à $\pi$ !

**Exercice 9.** 1. Soient $\theta > 0$ et $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$. Trouver la loi du couple $(X,Y)$ puis les lois de $X$ et $Y$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

2. Soient $P$ et $Q$ deux variables normales indépendantes $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose $R = P^2+Q^2$ et $\phi = \arctan(Q/P)$. Quelle est la loi du couple $(R,\phi)$ ?

**Solution.**
*1.* On utilise la méthode de la fonction muette. Soit $f$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^2$. On considère :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(f(X,Y)\big) &= \mathbb{E}\Big[f\left((-2\ln U)^{1/2}\cos(2\pi V),(-2\ln U)^{1/2}\sin(2\pi V)\right)\Big]\\
&= \int_0^1\int_0^1 f\left((-2\ln u)^{1/2}\cos(2\pi v),(-2\ln u)^{1/2}\sin(2\pi v)\right)dudv\,.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $r = (-2\ln u)^{1/2}$ et $\theta = 2\pi u$ :

$$\mathbb{E}\big(f(X,Y)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)e^{-r^2/2}rd\theta dr\,.$$

On passe ensuite en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(f(X,Y)\big) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dxdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)p(x)p(y)dxdy\,,
\end{aligned}$$

où $p(x) = 1/\sqrt{2\pi}\exp(-x^2/2)$ est la densité d'une v.a. gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Comme cette égalité est vraie pour toute fonction $f$, on a bien caractérisé la loi du couple $(X,Y)$ : C'est un couple de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

*2.* On pourrait utiliser la méthode de la fonction muette et recommencer un calcul similaire à celui de la question 1. Mais on peut aller plus vite. Si $U, V$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{U}(0,1)$, alors $(P,Q)$ et $(P',Q')$ ont même loi, avec $P' = \sigma\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ et $Q' =$

$\sigma\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$. Donc $(R,\phi)$ a même loi que $(R',\phi')$ avec $R' = P'^2 + Q'^2 = -2\ln U$ et $\phi' = \arctan(Q'/P') = 2\pi V$. $R'$ et $\phi'$ sont indépendantes, avec $R'$ de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et $\phi'$ de loi uniforme sur $[0,2\pi]$. Donc $R$ et $\phi$ sont indépendantes, avec $R$ de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et $\phi$ de loi uniforme sur $[0,2\pi]$.

## Pour aller plus loin

**Exercice 10.** Soient $X$, $Y$ et $Z$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X=Y)=1$. Montrer que $X$ et $Y$ ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

2. On suppose que $X$ et $Y$ ont la même loi.

   (a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) Montrer que les variables aléatoires $XZ$ et $YZ$ n'ont pas nécessairement la même loi.

**Solution.**

1. Si $\mathbb{P}(X=Y)=1$, alors pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on a l'égalité $\mathbb{P}(h(X)-h(Y)=0)=1$ et donc $\mathbb{E}(h(X)-h(Y))=0$, de sorte que $\mathbb{E}(h(X))=\mathbb{E}(h(Y))$, ce qui montre que $X$ et $Y$ ont la même loi.

   La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire $X$ de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $\sqrt{2\pi}^{-1}e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y=-X$. Alors $Y$ est une variable aléatoire $X$ de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Alors

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-x^2/2}\,dx.$$

   Donc $X$ et $Y$ ont la même loi mais ne sont pas égales avec probabilité 1.

2. (a) Pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la fonction $h\circ f$ est mesurable bornée. Comme $X$ et $Y$ ont la même loi, on a

$$\mathbb{E}(h\circ f(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(f(x))P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(f(x))P_Y(dx) = \mathbb{E}(h\circ f(Y)),$$

   ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

3. (b) On reprend les variables $X$ et $Y$ de la question 1. Soit $Z=X$. Alors $XZ=X^2$ et $YZ=-X^2$. La loi de $X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac $\delta_0$ en 0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc $XZ$ et $YZ$ n'ont pas la même loi.

**Exercice 11.** Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

– Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.

– l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.

– Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

Soit $T_n$ le premier temps où un individu occupe le site $n$. On fixe $a > 1/2$.

1. Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \dots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

2. Montrer que
$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n}-n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n.$$

3. Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

**Solution.**

1. Pour passer d'un site $n$ à un site $n+1$, il faut attendre un temps exponentiel de paramètre 1, indépendant de toute le reste.

2. Tout d'abord, si $u < 1$, d'après le théorème de transfert $e^{uE_1}$ admet une espérance car $\int_0^\infty e^{ux} e^{-u} du < \infty$ et
$$\mathbb{E}(e^{xE_1}) = \int_0^\infty e^{ux} e^{-u} du = \frac{1}{1-x}.$$
De plus, par indépendence de $E_1, \dots, E_n$,
$$\mathbb{E}(e^{uT_n}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^n e^{uE_i}\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{uE_i}) = (1-u)^{-n}.$$
On écrit ensuite
$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) = \mathbb{P}\Big(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} + n^{a-1/2}\Big) = \mathbb{P}\Big(e^{\frac{T_n}{\sqrt{n}}} \geq e^{\sqrt{n}+n^{a-1/2}}\Big),$$
et d'après l'inégalité de Markov
$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n}-n^{a-1/2}} \mathbb{E}\big(e^{\frac{T_n}{\sqrt{n}}}\big) = e^{-\sqrt{n}-n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}}\right)^n$$
d'après le calcul précédent (avec $u = 1/\sqrt{n}$).

3. On a

$$e^{-\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\right)^n = e^{-n^{1/2}-n\ln(1-n^{-1/2})} = e^{-n^{1/2}+n^{1/2}-1/2+o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Donc il existe une constante $c$ telle que $\mathbb{P}(T_n \geq n+n^a) \leq ce^{-n^{a-1/2}}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $a > 1/2$, on a $\sum_{n\geq 1} e^{-n^{a-1/2}} < \infty$. Donc

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(T_n \geq n+n^a) < \infty,$$

et le résultat demandé provient du (premier) lemme de Borel–Cantelli.