Petite Classe 3 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

10 mai 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de $\sin(U)$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire indépendante de X telle que telle que $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = 1/2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbf{1}_{x,y\geq 0}.$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Identifier la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.

Exercice 6. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1,\dots,U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0,\theta]$. On pose

$$S = \frac{n+1}{n} \max(U_1,\dots,U_n).$$

Calculer l'espérance et la variance de S.

Exercice 7. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbf{1}_{X > \lambda \mathbb{E}(X)}$.
2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a

$$\mathbb{P}\big(X > \lambda \mathbb{E}(X)\big) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 8 (La cerise sur le gâteau)**.** On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1. Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que l'autre part ?

2. Quelle est la taille (i.e. la longueur angulaire) moyenne de la part contenant la cerise ?

Exercice 9. 1. Soient $\theta > 0$ et U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$. Trouver la loi du couple (X,Y) puis les lois de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Soient P et Q deux variables normales indépendantes $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On pose $R = P^2 + Q^2$ et $\phi = \arctan(Q/P)$. Quelle est la loi du couple (R,ϕ) ?

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

2. On suppose que X et Y ont la même loi.

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 11. Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

– Chaque site de $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.

– l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.

– Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

Soit T_n le premier temps où un individu occupe le site n. On fixe $a > 1/2$.

1. Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, où les variables aléatoires $E_1, \ldots, E_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

2. Montrer que
$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}} \right)^n.$$

3. Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.