Petite Classe 2 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

24 avril 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Solution. On va utiliser le fait que deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.
Soit $Z = \lambda X$ et calculons la fonction de répartition F_Z de Z. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(\lambda X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x/\lambda)$. Donc

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/\lambda} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$, donc λX suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\lfloor aX \rfloor + 1$?
(pour un nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)

Solution. Soit $Z = \lfloor aX \rfloor + 1$, qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Sa loi est donc caractérisée par la donnée des quantités $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \geq 1$, que nous allons calculer. On a, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}\big(\lfloor aX \rfloor = k-1\big) = \mathbb{P}(k-1 \leq aX < k) = \mathbb{P}\Big(\frac{k-1}{a} \leq X < \frac{k}{a}\Big).$$

Donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \int_{\frac{k-1}{a}}^{\frac{k}{a}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_{\frac{k-1}{a}}^{\frac{k}{a}} = e^{-\lambda \frac{k-1}{a}} - e^{-\lambda \frac{k}{a}} = e^{-\lambda \frac{k-1}{a}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}}\right).$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\frac{\lambda}{a}}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{x>0}$.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi a pour densité f. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X^2.

Solution.

1. f est bien positive, d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ car

$$\int_0^\infty xe^{-x^2/2} dx = [-e^{-x^2/2}]_0^\infty = 1.$$

2. On calcule la fonction de répartition de X^2. Si $u < 0$, on a $\mathbb{P}(X^2 \leq u) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Si $u \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X^2 \leq u) = \mathbb{P}(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq \sqrt{u})$$

car $\mathbb{P}(-\sqrt{u} \leq X \leq 0) = 0$ (on rappelle que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) = 0$). Donc

$$\mathbb{P}(X^2 \leq u) = \int_0^{\sqrt{u}} xe^{-x^2/2}du = [-e^{-x^2/2}]_0^{\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2}.$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et $a > 0$. La variable aléatoire $\min(X, a)$ est-elle une variable aléatoire à densité ?

Solution. Calculons la fonction de répartition de $Z = \min(X, a)$. Pour $u \geq a$, on a $\mathbb{P}(Z \leq u) = 1$. Pour $u < 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq u) = 0$. Pour $0 \leq u < a$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u \text{ et } u < a) = \mathbb{P}(X \leq u) = 1 - e^{-\lambda u}.$$

La fonction de répartition de Z n'est pas continue en a, donc $\min(X, a)$ n'est pas à densité.

Exercice 5. Soit Z une variable aléatoire réelle de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|Z|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Solution. D'après le théorème de transfert, $|Z|^\alpha$ est intégrable si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\alpha}{1 + x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1 + x^2} dx < \infty.$$

Notons $f(x) = x^\alpha/(1 + x^2)$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étude en $+\infty$. Comme $f(x) \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ quand $x \to \infty$, f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$.
Étude en 0. Comme $f(x) \sim x^\alpha$ quand $x \to 0$, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.
Conclusion: $|Z|^\alpha$ est intégrable si et seulement si $|\alpha| < 1$.

Exercice 6. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer $\mathbb{E}(e^U)$.

Solution. On applique le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(e^U) = \int_{-1}^{1} e^x \frac{dx}{2} = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Exercice 7. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\alpha, \beta > 0$ on pose $X = \beta Z^{1/\alpha}$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X ?

2. La loi de X admet-elle une densité ?

La loi de X est appelée loi de Weibull de paramètre (α, β). Elle est utilisée (entre autres) pour modéliser des temps de panne.

Solution.

1. Si $x < 0$, on a $\mathbb{P}(X \le 0) = 0$. Si $x > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}\Big(Z \le (x/\beta)^\alpha\Big) = 1 - e^{-x^\alpha/\beta^\alpha}.$$

2. La fonction de répartition X est continue, dérivable sauf éventuellement en 0, donc X est à densité, et une densité est donnée par une dérivée de la fonction de répartition aux points où elle est dérivable. Une densité de X est donc
$$\frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha/\beta^\alpha} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 8. Préciser comment simuler la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ (de densité $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$) par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

Solution. La fonction de répartition est $F(x) = \big[\arctan(x/a) + \pi/2\big]/\pi$. Elle est inversible d'inverse $F^{-1}(u) = a\tan(\pi u - \pi/2)$. Donc on peut simuler une variable de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ en tirant $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et en posant $X = F^{-1}(U)$.

Exercice 9. (Moments et médiane d'une variable aléatoire réelle) Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

1. Si X est à valeurs positives et $k \ge 0$, montrer que
$$\mathbb{E}(X^{k+1}) = (k+1)\int_0^\infty t^k(1 - F(t))dt.$$

2. Si X est intégrable, montrer que, pour tout réel a,
$$\mathbb{E}(|X - a|) = \int_{-\infty}^a F(x)dx + \int_a^\infty (1 - F(x))dx.$$

3. On suppose que F est continue. Pour quelle(s) valeur(s) a la quantité $\mathbb{E}(|X - a|)$ est-elle minimale ?

Solution.
1.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^k(1-F(t))dt &= \int_0^\infty t^k\mathbb{P}(X > t)dt = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty t^k\mathbf{1}_{X>t}dt\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^X t^k dt\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\frac{X^{k+1}}{k+1}\Big)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^a F(x)dx + \int_a^\infty (1-F(x))dx &= \int_{-\infty}^a \mathbb{P}(X \le x)dx + \int_a^\infty \mathbb{P}(X > x)dx\\ &= \mathbb{E}\Big(\int_{-\infty}^a \mathbf{1}_{X\le x}dx + \int_a^\infty \mathbf{1}_{X>x}dx\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{X\le a}(a - X) + \mathbf{1}_{X>a}(X-a)dx\Big) = \mathbb{E}(|X-a|)\end{aligned}$$

3. D'après la formule précédente, $\phi : a \mapsto \mathbb{E}(|X-a|)$ est de classe $\mathcal{C}_1$ et tend vers l'infini en $\pm\infty$. ϕ atteint donc son minimum global. Les points extremaux de ϕ vérifient $\phi'(a) = 0$, c'est-à-dire $1 - 2F(a) = 0$. Comme F est croissante, il y a soit un point, soit un intervalle de points a tels que $F(a) = 1/2$. Ces points atteignent le minimum de ϕ.

Exercice 10. (Loi log-normale) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $Z = e^X$ est de densité $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \mathbf{1}_{z>0}$. La loi de Z s'appelle la loi log-normale.
2. Pour $a \in [-1,1]$, soit $f_a(z) = f(z)(1 + a\sin(2\pi \ln z))$. Vérifier que f_a est une densité de probabilité. Montrer que si Z_a est de densité f_a, alors Z_a et Z ont les mêmes moments, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z^n) = \mathbb{E}(Z_a^n)$ (on calculera $\mathbb{E}(e^{kX})$ pour $k \in \mathbb{R}$ et on admettra que la formule reste vraie pour $k \in \mathbb{C}$).

Cet exercice montre en particulier que les moments d'une variable aléatoire réelle ne caractérisent pas sa loi.

Solution.
1. On calcule la fonction de répartition de Z. Si $z \leq 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$. Si $z > 0$,

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq \ln z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln z} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

qui est une fonction dérivable de dérivée $\frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}}$. Donc Z est à densité f.
2. f_a est une fonction positive. Son intégrale vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin(2\pi \ln z)dz = 1 + \mathbb{E}\big(\sin(2\pi \ln Z)\big) = 1 + \mathbb{E}\big(\sin(2\pi X)\big)$$

Or la densité de X est paire et $\sin(2\pi x)$ est une fonction impaire, donc $\mathbb{E}\big(\sin(2\pi X)\big) = 0$ et donc $\int_{-\infty}^{\infty} f_a(z)dz = 0$ ce qui permet de conclure que f_a est une densité.
On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(Z_a^n\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^n f_a(z)dz = \mathbb{E}(Z^n) + a\mathbb{E}\big(Z^n \sin(2\pi \ln Z)\big) = \mathbb{E}(Z^n) + a\mathbb{E}\big(e^{nX}\sin(2\pi X)\big) \\ &= \mathbb{E}(Z^n) + a\mathrm{Im}\big\{\mathbb{E}\big(e^{(n+i2\pi)X}\big)\big\} \end{aligned}$$

Or pour tout k réel

$$\mathbb{E}(e^{kX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2}} dx e^{\frac{k^2}{2}} = e^{\frac{k^2}{2}}$$

En admettant que cette formule reste vraie pour $k \in \mathbb{C}$:

$$\mathbb{E}\big(e^{(n+i2\pi)X}\big) = e^{\frac{n^2}{2} + i2\pi n - \frac{\pi^2}{2}} = e^{\frac{n^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}}$$

La partie imaginaire étant nulle, on a bien $\mathbb{E}\big(Z_a^n\big) = \mathbb{E}(Z^n)$.

Exercice à chercher pour la troisième PC

Exercice 11. Calculer les espérances et les variances des lois suivantes :

1. Variable aléatoire uniforme sur $[a, b]$.
2. Variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
3. Variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Pour aller plus loin (problèmes de mesurabilité)

Exercice 12. Soient Ω un ensemble fondamental, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et $(A_i)_{i\geq 1}$ une partition d'événements (cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).
On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Solution. Soit $B \subset \mathbb{N}^*$. Alors, par définition,

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{i\in B} A_i \in \mathcal{A},$$

comme union finie ou dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 13. (Exemple d'ensemble non-mesurable) Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0, 2\pi]$). On voit $[0, 2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).
Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.
2. En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.

Solution.

1. Si $z \in \mathbb{S}$, il existe $i \in I$ tel que $z \in \mathcal{O}_i$. Ainsi z est dans l'orbite de z_i, et il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z \in R_\alpha^{(k)}(z_i)$. Donc $z \in R_\alpha^{(k)}(E)$, et donc $\mathbb{S} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$. Comme l'inclusion inverse est claire, on a égalité des deux ensembles.

   Pour montrer que l'union est disjointe, raisonnons par l'absurde en supposant que $x \in R_\alpha^{(m)}(E)$ et $x \in R_\alpha^{(n)}(E)$ avec $m \neq n$. Il existe alors $i, j \in I$ tels que $x = R_\alpha^{(m)}(z_i) = R_\alpha^{(n)}(z_j)$. Donc z_i et z_j sont dans la même orbite, et donc $i = j$. Mais alors $z_i = R_\alpha^{(m-n)}(z_i)$, ce qui contredit le fait que les orbites sont infinies.

2. Si E était mesurable, on aurait

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{S}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(R_\alpha^{(n)}(E)).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(R_\alpha^{(n)}(E)) = \mathbb{P}(E)$ car la loi uniforme sur le cercle est invariante par rotations. Ceci nous amène à une contradiction.