Petite Classe 2 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

24 avril 2017 - salle PC n^o 16

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\lfloor aX \rfloor + 1$?
(pour un nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{x>0}$.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi a pour densité f. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X^2.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et $a > 0$. La variable aléatoire $\min(X, a)$ est-elle une variable aléatoire à densité ?

Exercice 5. Soit Z une variable aléatoire réelle de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|Z|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 6. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer $\mathbb{E}(e^U)$.

Exercice 7. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\alpha, \beta > 0$ on pose $X = \beta Z^{1/\alpha}$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. La loi de X admet-elle une densité ?

La loi de X est appelée loi de Weibull de paramètre (α, β). Elle est utilisée (entre autres) pour modéliser des temps de panne.

Exercice 8. Préciser comment simuler la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ (de densité $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$) par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

Exercice 9. (Moments et médiane d'une variable aléatoire réelle) Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

1. Si X est à valeurs positives et $k \geq 0$, montrer que
$$\mathbb{E}(X^{k+1}) = (k+1)\int_0^\infty t^k(1 - F(t))dt.$$
2. Si X est intégrable, montrer que, pour tout réel a,
$$\mathbb{E}(|X - a|) = \int_{-\infty}^a F(x)dx + \int_a^\infty (1 - F(x))dx.$$

3. On suppose que F est continue. Pour quelle(s) valeur(s) a la quantité $\mathbb{E}(|X-a|)$ est-elle minimale ?

Exercice 10. (Loi log-normale) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $Z = e^X$ est de densité $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \mathbf{1}_{z>0}$. La loi de Z s'appelle la loi log-normale.

2. Pour $a \in [-1,1]$, soit $f_a(z) = f(z)(1 + a\sin(2\pi \ln z))$. Vérifier que f_a est une densité de probabilité. Montrer que si Z_a est de densité f_a, alors Z_a et Z ont les mêmes moments, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z^n) = \mathbb{E}(Z_a^n)$ (on calculera $\mathbb{E}(e^{kX})$ pour $k \in \mathbb{R}$ et on admettra que la formule reste vraie pour $k \in \mathbb{C}$).

Cet exercice montre en particulier que les moments d'une variable aléatoire réelle ne caractérisent pas sa loi.

Exercice à chercher pour la troisième PC

Exercice 11. Calculer les espérances et les variances des lois suivantes :

1. Variable aléatoire uniforme sur $[a,b]$.

2. Variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3. Variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Pour aller plus loin (problèmes de mesurabilité)

Exercice 12. Soient Ω un ensemble fondamental, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et $(A_i)_{i\geq 1}$ une partition d'événements (cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).
On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire ($\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on le munit naturellement de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$).

Exercice 13. (Exemple d'ensemble non-mesurable) Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,2\pi]$ (muni de la tribu borélienne sur $[0,2\pi]$). On voit $[0,2\pi]$ comme le cercle unité $\mathbb{S}$ en identifiant les deux points 0 et 2π. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha/(2\pi)$ soit irrationel, et notons R_α la rotation d'angle α sur le cercle, définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. On note $R_\alpha^{(n)}$ la composée n-ième de R_α pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $z \in \mathbb{S}$, l'orbite de z est par définition l'ensemble $\{R_\alpha^{(n)}(z) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}$. Comme $\alpha/(2\pi)$ est irrationnel, on peut montrer que toutes les orbites sont infinies (et même denses).
Notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des orbites, et en utilisant l'axiome du choix choisissons pour tout $i \in I$ un représentant $z_i \in O_i$. Posons finalement

$$E = \{z_i : i \in I\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^{(n)}(E)$ et que cette union est disjointe.

2. En supposant que E est mesurable, aboutir à une contradiction.