Petite Classe 1 - MAP 311 - Groupes 1 et 12

Josselin Garnier

18 avril 2017 - salle PC n^o 16

Pré-requis :
- expérience aléatoire et espace fondamental, événements;
- probabilité discrète, loi uniforme et calcul combinatoire;
- conditionnement (par un événement), formule de Bayes;
- événements indépendants;
- théorème de Borel-Cantelli;
- variable aléatoire $X(\omega)$;
- lois discrètes : Bernoulli, géométrique, binomiale, Poisson;
- espérance (discrète) : moyenne, variance, écart-type;
- fonction génératrice, moments;
- expérance conditionnelle, indépendance.

Exercice 1 (Un grand classique)**.** On considère une classe de n élèves. On considère qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?
Indication : On définit d'abord l'espace de probabilité : $\Omega = \{1, ..., 365\}^n$ avec $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ où ω_i est le jour de naissance de l'élève i. On choisit la probabilité uniforme sur Ω.
A partir de quel n a-t-on $p_n > 1/2$?
(on pourra utiliser l'équivalence $\ln(1 + x) \simeq x$ pour $|x| \ll 1$).

2. Quelle est la probabilité q_n qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur ?
A partir de quel n a-t-on $q_n > 1/2$?

Solution.

$$\begin{aligned}
p_n &= 1 - \mathbb{P}\,(\text{tous les élèves sont nés des jours différents}) \\
&= 1 - \mathbb{P}\,(\{\omega \text{ tel que } \omega_i \neq \omega_j, \forall i \neq j\}) = 1 - \frac{\text{Card}\,(\{\omega \text{ tel que } \omega_i \neq \omega_j, \forall i \neq j\})}{365^n} \\
&= 1 - \frac{\text{Card}\,(\{\text{injections de } \{1, \dots, n\} \text{ dans } \{1, \dots, 365\}\})}{365^n} \\
&= 1 - \frac{365!}{(365 - n)!365^n}\,.
\end{aligned}$$

$p_{22} \simeq 0.476$, $p_{23} \simeq 0.507$, $p_{30} \simeq 0.706$, $p_{40} \simeq 0.891$, $p_{366} \simeq 1$.
$1 - p_n$ s'écrit aussi :

$$1 - p_n = \frac{365}{365} \frac{365 - 1}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{k}{365}) \right)\,.$$

Si n n'est pas grand, une évaluation approximative de cette somme se fait en remplaçant $\ln(1-x)$ par $-x$ et en utilisant la somme d'une progression arithmétique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

qui conduit à l'approximation $1 - p_n \sim \exp(-n^2/730)$. Pour voir par exemple pour quel n on a $p_n \sim 1/2$ on prend $n \sim \sqrt{730 \ln 2} \sim 23$.

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - \mathbb{P}\,(\text{tous les élèves sont nés un jour différent de } x) \\ &= 1 - \mathbb{P}\,(\{\omega \text{ tel que } \omega_i \neq x, \forall i\}) = 1 - \frac{\text{Card }(\{\omega \text{ tel que } \omega_i \neq x, \forall i\})}{365^n} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n. \end{aligned}$$

On obtient les valeurs numériques suivantes :

$$q_{20} \simeq 0{,}053\,, \quad q_{23} \simeq 0{,}061\,, \quad q_{30} \simeq 0{,}079\,, \quad q_{50} \simeq 0{,}128\,, \quad q_{366} \simeq 0{,}634\,.$$

Ici aussi, on peut obtenir une expression approchée de q_n en remarquant que :

$$\ln(1-q_n) = n \ln\Big(\frac{364}{365}\Big) = n \ln\Big(1 - \frac{1}{365}\Big) \simeq -\frac{n}{365},$$

si bien que $q_n \simeq 1 - \exp(-n/365)$. Pour voir par exemple pour quel n on a $q_n \sim 1/2$ on prend $n \sim 365 \ln 2 \sim 253$.

Exercice 2. On suppose qu'il y a autant de chances d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ait au moins un garçon ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?

4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille répond. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille répond au téléphone avec probabilité p. Quelle est la probabilité pour que votre voisin ait un garçon ?

Solution.
1. On a trois configurations possibles : deux filles, une fille et un garçon, ou deux garçons. On prend comme espace $\Omega_1 = \{FF, FG, GG\}$ en faisant attention que la probabilité sur cet espace n'est pas uniforme : on a $\mathbb{P}_1(\{FF\}) = 1/4$, $\mathbb{P}_1(\{FG\}) = 1/2$, $\mathbb{P}_1(\{GG\}) = 1/4$. Donc

$$\mathbb{P}_1(\text{ il y a au moins un garçon }) = \mathbb{P}_1(\{FG\}) + \mathbb{P}_1(\{GG\}) = \frac{3}{4}$$

On aurait pu prendre un autre modèle en distinguant les deux enfants (l'ainé et le benjamin). On a alors quatre configurations et $\Omega_2 = \{(FF), (FG), (GF), (GG)\}$ (la première lettre désigne le sexe de l'ainé). La probabilité $\mathbb{P}_2$ sur cet espace est uniforme et donc

$$\mathbb{P}_2(\text{ il y a au moins un garçon }) = \mathbb{P}_2(\{(FG)\}) + \mathbb{P}_2(\{GF)\}) + \mathbb{P}_2(\{(GG)\}) = \frac{3}{4}$$

2. On reprend le modèle $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$:

$$\mathbb{P}_2(\text{ il y a au moins un garçon} \mid \text{l'ainé est une fille }) = \frac{\mathbb{P}_2(\{(FG)\})}{\mathbb{P}_2(\{(FG)\} \cup \{(FF)\})} = \frac{1}{2}$$

3.

On reprend le modèle $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$:

$$\mathbb{P}_1(\text{ il y a au moins un garçon} \mid \text{il y a au moins une fille }) = \frac{\mathbb{P}_1(\{FG\})}{\mathbb{P}_2(\{FG\} \cup \{FF\})} = \frac{1/2}{1/4 + 1/2} = \frac{2}{3}$$

On reprend le modèle $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$:

$$\mathbb{P}_2(\text{ il y a au moins un garçon} \mid \text{il y a au moins une fille }) = \frac{\mathbb{P}_2(\{(FG)\} \cup \{(GF)\})}{\mathbb{P}_2(\{(FG)\} \cup \{(GF)\} \cup \{(FF)\})} = \frac{2}{3}$$

4. On introduit un nouveau modèle : $\Omega_3 = \{(FF), (FG), (GF), (GG)\}$ (la première lettre désigne le sexe de l'enfant qui répond au téléphone). La probabilité sur cet espace n'est pas uniforme. On a $\mathbb{P}_3(\{(FF)\}) = \mathbb{P}_3(\{(GG)\}) = 1/4$. Donc $\mathbb{P}_3(\{(FG)\}) + \mathbb{P}_3(\{(GF)\}) = 1/2$. De plus, on sait

$$\mathbb{P}_3(\{(FG)\} | \{(FG)\} \cup \{(GF)\}) = p$$

Donc $\mathbb{P}_3(\{(FG)\}) = p/2$ et $\mathbb{P}_3(\{(GF)\}) = (1-p)/2$. Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_3(\text{ il y a au moins un garçon} \mid \text{une fille répond }) &= \mathbb{P}_3(\{(FG)\} | \{(FG)\} \cup \{(FF)\}) \\ &= \frac{p/2}{p/2 + 1/4} = \frac{2p}{2p+1} \end{aligned}$$

Exercice 3. On cherche un parapluie dans un meuble constitué de quatre tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p, et s'il y est, il peut se trouver dans n'importe quel tiroir. Sachant qu'on a examiné les trois premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le quatrième ?

Solution. Pour modéliser ce problème, considérons un espace de probabilité avec les événements suivants. Pour $1 \leq i \leq 4$, T_i est l'événement "le parapluie est dans le i-ième tiroir". L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) = p$, et on cherche la probabilité

$$\mathbb{P}(T_4 \mid T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c).$$

On calcule alors:

$$\mathbb{P}(T_4 \mid T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c) = \frac{\mathbb{P}(T_4 \cap T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c)}{\mathbb{P}(T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c)} = \frac{\mathbb{P}(T_4)}{1 - \mathbb{P}(T_1) - \mathbb{P}(T_2) - \mathbb{P}(T_3)}.$$

De plus, on a $\mathbb{P}(T_i | T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) = 1/4$ pour tout $1 \leq i \leq 4$. Comme $p = \mathbb{P}(T_1) + \cdots + \mathbb{P}(T_4)$, on en déduit que $\mathbb{P}(T_i) = p/4$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_4 \mid T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c) = \frac{p/4}{1 - 3p/4} = \frac{p}{4 - 3p}.$$

Exercice 4. Vous jouez une succession de parties de pile ou face avec la même pièce. A chaque partie vous gagnez ou perdez 1 euro. On va chercher la probabilité pour que votre gain devienne strictement positif pour la première fois à la t-ième partie.
Mathématiquement : Soit X_k, $k \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables de Bernoulli indépendantes telle que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On note T le premier instant où $S_n \geq 1$ (avec $T = \infty$ si $S_n \leq 0$ pour tout n), et $p_t = \mathbb{P}(T = t)$.

1. Que valent p_0 et p_1 ? Etablir la relation de récurrence pour $t \geq 2$:

$$p_t = (1 - p) \times (p_1 p_{t-2} + p_2 p_{t-3} + \cdots + p_{t-2} p_1)$$

2. Calculer la fonction génératrice $G(z) = \mathbb{E}[z^T]$ de T.

3. En déduire p_t et $\mathbb{P}(T < \infty)$. Calculer $\mathbb{E}[T]$ quand cette espérance existe.

Solution.
1. On a $p_0 = 0$ et $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$.
Soit $t \geq 2$. On décompose

$$\{T = t\} = \bigcup_{k=2}^{t-1} \{S_1 = -1, S_2 < 0, \ldots, S_{k-1} < 0, S_k = 0, S_{k+1} < 1, \ldots, S_{t-1} < 1, S_t = 1\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = t) &= \sum_{k=2}^{t-1} \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(S_2 < 0, \ldots, S_{k-1} < 0, S_k = 0, S_{k+1} < 1, \ldots, S_{t-1} < 1, S_t = 1 | S_1 = -1) \\
&= \sum_{k=2}^{t-1} \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(S_2 < 0, \ldots, S_{k-1} < 0, S_k = 0 | S_1 = -1) \\
&\quad \times \mathbb{P}(S_{k+1} < 1, \ldots, S_{t-1} < 1, S_t = 1 | S_k = 0) \\
&= (1 - p) \sum_{k=2}^{t-1} \mathbb{P}(T = k - 1)\mathbb{P}(T = t - k)
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$p_t = (1 - p) \sum_{k=2}^{t-1} p_{k-1} p_{t-k}$$

2. En particulier, on a$p_2 = 0$. On se sert de la question précédente pour établir que

$$G = pz + (1-p)zG^2$$

donc

$$G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)z^2}}{2(1-p)z}$$

Comme on sait que $G(0) \in [0,1]$ (en fait, $G(0) = p_0 = 0$) et G est continue, on doit prendre le signe $-$. On remarque alors que

$$G(z) \overset{z \nearrow 1}{\nearrow} G(1) = \frac{1 - |1-2p|}{2(1-p)}$$

qui vaut 1 si $p \geq 1/2$ et $p/(1-p)$ si $p < 1/2$. Donc $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_t p_t = G(1)$ vaut 1 si $p \geq 1/2$ et $p/(1-p)$ si $p < 1/2$.
Si $p < 1/2$ alors l'espérance n'est pas définie.
Si $p = 1/2$, alors $G'(1) = +\infty$, donc $\mathbb{E}[T] = \infty$, alors que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.
Si $p > 1/2$, alors $G'(1) = 1/(2p-1) < \infty$.

Exercice 5 (Formule du crible)**.** Montrer la formule du crible. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace de probabilité, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) \tag{1}$$

Indication : Deux méthodes possibles (au moins) :
1) Montrer d'abord que $1 - \mathbf{1}_{\cup A_i} = \prod_i (1 - \mathbf{1}_{A_i})$.
2) Commencer par le cas $n = 2$, puis récurrence sur n.

Solution.
On va montrer le résultat par récurrence sur n. Bien sûr le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons la récurrence montrée au rang n. Soit une suite d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n+1}$. En appliquant le 1) au couple $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1}, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}\right).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au premier terme du membre de droite :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au troisième terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \qquad \text{par distributivité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}).
\end{aligned}$$

En regroupant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\ &\quad + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}\right) . \end{aligned} \tag{2}$$

Or en cassant le membre de droite de l'Eq. (1) (au rang $n+1$) en deux, avec d'un côté les ensembles d'indices qui contiennent $n+1$, et de l'autre côté ceux qui ne le contiennent pas, on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le n} \mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{n+1}\right) .\end{aligned}$$

Dans le premier terme du membre de droite la somme s'arrête en fait à $k=n$, car il y a au plus n entiers distincts entre 1 et n. Dans le second terme, on opère le changement de variables $k'=k-1$. On obtient alors le résultat.

Voici une autre preuve moins calculatoire : Il est facile de vérifier d'une part que :

$$1-\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{1}_{A_i}) , \tag{3}$$

et d'autre part que, pour tout sous-ensemble d'indices $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$:

$$\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{A_{i_j}} = \mathbf{1}_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}} .$$

En prenant l'espérance de l'égalité (3) et en développant le membre de droite, on obtient directement la formule du crible avec $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)=\mathbb{P}(A)$.

Exercice 6 (Application de la formule du crible)**.** Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant chacun dépose sa veste au vestiaire. Au matin, quand les esprits ne sont plus très clairs, chacun prend une veste au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins ait sa propre veste ?

2. Calculer la probabilité $p_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste.

3. Calculer la limite $p(k)$ de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini. Vérifier que la famille $(p(k))_{k\in\mathbb{N}}$ détermine une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Solution.
1. Du point de vue mathématique ce problème est équivalent au tirage d'une permutation aléatoire σ de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Un point fixe i d'une permutation $\sigma = \big(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)\big)$ est défini par la condition $\sigma(i) = i$. Une permutation sans point fixe, i.e. $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, est appelée dérangement.

Exemple : Trois permutations de $\{1,\dots,6\}$:

$$\underset{\text{un dérangement}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{un point fixe}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathit{5} & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & \mathit{5} & 4 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{trois points fixes}}{\begin{pmatrix} 1 & \mathit{2} & 3 & 4 & \mathit{5} & \mathit{6} \\ 4 & \mathit{2} & 1 & 3 & \mathit{5} & \mathit{6} \end{pmatrix}}$$

L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble de toutes les permutations de $\{1,\dots,n\}$, donc $\text{Card}\,(\Omega) = n!$. En faisant l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par $\mathbb{P}(A) := \text{Card}\,(A)/\text{Card}\,(\Omega)$. Pour la première partie on calcule la probabilité de l'événement $A =$"au moins une personne choisit sa propre veste". Appelons A_i l'événement "la $i$ème personne choisit sa propre veste" (i.e. $\sigma(i) = i$). Donc :

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

On vérifie qu'on peut construire une bijection Ψ de A_i dans l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,i{-}1,i{+}1,\dots,N\}$ en posant $\Psi(\sigma) = (\sigma(1),\dots,\sigma(i{-}1),\sigma(i{+}1),\dots,\sigma(n))$. Ceci montre que $\text{card}(A_i) = (n-1)!$ et donc $\mathbb{P}(A_i) = (n-1)!/n! = 1/n$. De même, la probabilité que deux personnes, par exemple 1 et 2, choisissent leur propre veste est $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = (n-2)!/n!$ car on peut construire une bijection de $A_1 \cap A_2$ dans l'ensemble des permutations de $\{3,\dots,n\}$. En généralisant cet argument on trouve que la probabilité de l'intersection de k événements, par exemple $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$, est donnée par :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\cdot$$

Il y a $\binom{n}{k}$ termes dans la $k$ème somme de la formule d'inclusion-exclusion correspondant aux $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de k indices. Donc :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\cdot$$

2. On désigne par $p_n(k)$ la probabilité que k personnes exactement sélectionnent leur propre veste. On vient de démontrer que :

$$p_n(0) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}\,\cdot$$

Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour que k personnes exactement sélectionnent leur propre veste. Alors pour les autres $(n-k)$ hommes il y a $(n-k)!p_{n-k}(0)$ possibilités qu'aucune de ces personnes ne choisisse sa propre veste. Par conséquent :

$$p_n(k) = \frac{\binom{n}{k}(n-k)!p_{n-k}(0)}{n!} = \frac{p_{n-k}(0)}{k!} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!k!} .$$

3. Notons que $p_n(0) \to \exp(-1)$ lorsque $n \to +\infty$ (c'est la série exponentielle $\exp(-x)$ pour $x = -1$). Plus généralement, pour chaque k fixé, on a $p_n(k) \to \exp(-1)/k!$. Donc on trouve que p_n converge vers $p(k)$ où $p(k)$ est la loi de Poisson de paramètre 1.

Exercice 7. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires géométriques de paramètres p_1 et p_2 :

$$\mathbb{P}(X_j = n) = p_j(1-p_j)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer la loi de $X_m := \min(X_1, X_2)$. Calculer l'espérance de X_m.

Solution.
X_m est à valeurs dans l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m \geq n) &= \mathbb{P}(X_1 \geq n, X_2 \geq n) = \mathbb{P}(X_1 \geq n)\mathbb{P}(X_2 \geq n) = \prod_{j=1}^{2} p_j \frac{(1-p_j)^{n-1}}{1-(1-p_j)} \\ &= [(1-p_1)(1-p_j)]^{n-1} \end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p = 1 - (1-p_1)(1-p_j)$.
L'espérance de X_m vaut $1/p$.

Exercice 8. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires géométriques de paramètre p :

$$\mathbb{P}(X_j = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Déterminer la loi de $X := \min(X_1, \ldots, X_n)$ et de $Y := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Déterminer la loi jointe de (X, Y). Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

3. Calculer la loi jointe de (X, Z) où $Z = Y - X$. Est-ce que X et Z sont indépendantes ?

Solution.
1. X est à valeurs dans l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x, \ldots, X_n \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x)^n = [q^{x-1}]^n = [q^n]^{x-1}$$

en posant $q = 1 - p$. On reconnaît une loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.
Y est à valeurs dans l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Pour tout $y \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq y)^n = [1 - q^y]^n$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y=y)=\mathbb{P}(Y\leq y+1)-\mathbb{P}(Y\leq y)=[1-q^{y+1}]^n-[1-q^y]^n$$

2. Soient $x,y\in\mathbb{N}^*$.
Si $x>y$, alors

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=0$$

Si $x=y$:

$$\mathbb{P}(X=x,Y=x)=\mathbb{P}(X_1=x)^n=[q^{x-1}-q^x]^n$$

Si $x<y$, alors

$$\mathbb{P}(X\geq x,Y\leq y)=\mathbb{P}(x\leq X_1\leq y)=[q^{x-1}-q^y]^n$$

Donc

$$\mathbb{P}(X\geq x,Y=y)=[q^{x-1}-q^y]^n-[q^{x-1}-q^{y-1}]^n$$

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=[q^{x-1}-q^y]^n-[q^{x-1}-q^{y-1}]^n-[q^x-q^y]^n+[q^x-q^{y-1}]^n$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes :

$$\mathbb{P}(X\geq 2,Y\leq 1)=0<\mathbb{P}(X\geq 2)\mathbb{P}(Y\leq 1)$$

3. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soient $x\in\mathbb{N}^*$. Si $z=0$, alors

$$\mathbb{P}(X=x,Z=0)=\mathbb{P}(X=x,Y=x)=[q^{x-1}-q^x]^n=q^{nx}\big\{[q^{-1}-1]^n\big\}$$

Si $z>0$, alors

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X=x,Z=z) & = & \mathbb{P}(X=x,Y=x+z)\\ & = & [q^{x-1}-q^{x+z}]^n-[q^{x-1}-q^{x+z-1}]^n-[q^x-q^{x+z}]^n+[q^x-q^{x+z-1}]^n\\ & = & q^{nx}\big\{[q^{-1}-q^z]^n-[q^{-1}-q^{z-1}]^n-[1-q^z]^n+[1-q^{z-1}]^n\big\}\end{array}$$

La loi jointe se met sous forme produit, donc X et Z sont indépendantes.

Pour aller plus loin

Exercice 9. (**Un petit calcul**) Combien de fois faut-il, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face ?

Solution.
Supposons que x soit la réponse. On considère les premiers lancers de pièces. Si on a F ou PP, le jeu recommence avec la même probabilité, alors que si on a PF, le jeu s'arrête. On a alors

$$x=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}(x+2)+\frac{2}{4}.$$

La résolution de ce système donne $x=6$.

Exercice 10. (Pouvoir paranormal moyen) On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.

2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Solution.
Supposons que les cartes dans le paquet soient numérotées de 1 à 52. Le devin annonce les cartes dans un autre ordre, c'est à dire qu'il annonce une permutation de $\{1, \ldots, 52\}$. On se place donc sur $(\mathcal{S}_{52}, \mathcal{P}(\mathcal{S}_{52}))$, où $\mathcal{S}_{52}$ est l'ensemble des permutations de taille 52, avec la probabilité uniforme.
1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k\geq 1} k \left(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=2}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(K \geq k) \right) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).
\end{aligned}$$

2. Le nombre de cartes que le devin trouvera est

$$X = \max\{k : \omega(1) < \omega(2) < \cdots < \omega(k)\}.$$

Et on a pour $1 \leq k \leq 52$

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{1\leq j_1 < \cdots < j_k \leq 52} \mathbb{P}(\{\omega : \omega(1) = j_1, \ldots, \omega(k) = j_k\}) = \sum_{1\leq j_1 < \ldots < j_k \leq 52} \frac{(52-k)!}{52!} = \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, il trouvera en moyenne

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{52} \frac{1}{k!} \simeq e - 1$$

cartes.