Petite Classe 1 - MAP 311 - Groupes 1 et 13

Josselin Garnier

18 avril 2017 - salle PC n^o 16

Pré-requis :
- expérience aléatoire et espace fondamental, événements;
- probabilité discrète, loi uniforme et calcul combinatoire;
- conditionnement (par un événement), formule de Bayes;
- événements indépendants;
- théorème de Borel-Cantelli;
- variable aléatoire $X(\omega)$;
- lois discrètes : Bernoulli, géométrique, binomiale, Poisson;
- espérance (discrète) : moyenne, variance, écart-type;
- fonction génératrice, moments;
- expérance conditionnelle, indépendance.

Exercice 1 (Un grand classique)**.** On considère une classe de n élèves. On considère qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?
Indication : On définit d'abord l'espace de probabilité : $\Omega = \{1, ..., 365\}^n$ avec $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ où ω_i est le jour de naissance de l'élève i. On choisit la probabilité uniforme sur Ω.
A partir de quel n a-t-on $p_n > 1/2$?
(on pourra utiliser l'équivalence $\ln(1 + x) \simeq x$ pour $|x| \ll 1$).

2. Quelle est la probabilité q_n qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur ?
A partir de quel n a-t-on $q_n > 1/2$?

Exercice 2. On suppose qu'il y a autant de chances d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ait au moins un garçon ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?

4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille répond. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille répond au téléphone avec probabilité p. Quelle est la probabilité pour que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 3. On cherche un parapluie dans un meuble constitué de quatre tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p, et s'il y est, il peut se trouver dans n'importe quel tiroir. Sachant qu'on a examiné les trois premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le quatrième ?

Exercice 4. Vous jouez une succession de parties de pile ou face avec la même pièce. A chaque partie vous gagnez ou perdez 1 euro. On va chercher la probabilité pour que votre gain devienne strictement positif pour la première fois à la t-ième partie.
Mathématiquement : Soit X_k, $k \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables de Bernoulli indépendantes telle que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On note T le premier instant où $S_n \geq 1$ (avec $T = \infty$ si $S_n \leq 0$ pour tout n), et $p_t = \mathbb{P}(T = t)$.

1. Que valent p_0 et p_1 ? Etablir la relation de récurrence pour $t \geq 2$:

$$p_t = (1 - p) \times (p_1 p_{t-2} + p_2 p_{t-3} + \cdots + p_{t-2} p_1)$$

2. Calculer la fonction génératrice $G(z) = \mathbb{E}[z^T]$ de T.

3. En déduire p_t et $\mathbb{P}(T < \infty)$. Calculer $\mathbb{E}[T]$ quand cette espérance existe.

Exercice 5 (Formule du crible)**.** Montrer la formule du crible. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace de probabilité, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right)$$

Indication : Deux méthodes possibles (au moins) :
1) Montrer d'abord que $1 - \mathbf{1}_{\cup A_i} = \prod_i (1 - \mathbf{1}_{A_i})$.
2) Commencer par le cas $n = 2$, puis récurrence sur n.

Exercice 6 (Application de la formule du crible)**.** Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant chacun dépose sa veste au vestiaire. Au matin, quand les esprits ne sont plus très clairs, chacun prend une veste au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins ait sa propre veste ?

2. Calculer la probabilité $p_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste.

3. Calculer la limite $p(k)$ de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini. Vérifier que la famille $(p(k))_{k \in \mathbb{N}}$ détermine une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires géométriques de paramètres p_1 et p_2 :

$$\mathbb{P}(X_j = n) = p_j(1 - p_j)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer la loi de $X_m := \min(X_1, X_2)$. Calculer l'espérance de X_m.

Exercice 8. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires géométriques de paramètre p :

$$\mathbb{P}(X_j = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Déterminer la loi de $X := \min(X_1, \ldots, X_n)$ et de $Y := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Déterminer la loi jointe de (X, Y). Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

3. Calculer la loi jointe de (X, Z) où $Z = Y - X$. Est-ce que X et Z sont indépendantes ?

Pour aller plus loin

Exercice 9. (**Un petit calcul**) Combien de fois faut-il, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face ?

Exercice 10. (Pouvoir paranormal moyen) On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.

2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?