MAP 311 - Aléatoire

Josselin Garnier

2016-2017

Préambule

- Cours 9 blocs (cours + PC).
- Amphi 0 : demain !
- Formation Python : demain (amphi), 20, 24 ou 26 avril (TD).
- Contrôle (Hors classement) : 3 juillet.
- Projet de simulation en binôme :
  - Les inscriptions obligatoires et par binôme ouvriront le 5 mai sur le site https://de.polytechnique.fr/ et se clôtureront le 15 mai à minuit.
  - Numerus clausus : 13 binômes par projet (faire une liste de choix).
  - Date de remise des projets : 3 juillet.
- Soutien Projets : tous les mercredis de 18h à 20h, du 07 au 28 juin en Amphi Gregory.
  Responsable : Florent Benaych-Georges, assisté de Céline Bonnet et Juliette Chevallier.

- Contenu du cours = 2/3 probabilités + 1/3 statistique.
- Note de module = 2/3 contrôle + 1/3 projet.
- QCM d'entraînement : sur la page web du cours.
  Page web provisoire : http://www.josselin-garnier.org/
  A court/moyen terme : moodle
  En général, QCM ouvert du vendredi à 12h au mercredi suivant à 19h.
  Pour le premier QCM : ouvert jusqu'à jeudi 20 avril à 19h
- Soutien Tutorat : tous les mercredis du 19 avril au 28 juin (sauf les 17 et 24 mai) : de 18h à 20h en PC 24.
  Responsable tutorat MAP 311 : Antoine Havet, antoine.havet@polytechnique.edu.
  Inscription auprès de la responsable du tutorat : Linda Guevel, linda.guevel@polytechnique.edu.

Leçon 1 : Exemples de modèles discrets

Deux objectifs :

- Faire un rapide tour de notions qu'on supposera connues dans la suite
- Donner quelques applications de ces résultats

Ensemble fondamental

- Expérience aléatoire : expérience dont on ne connaît pas le résultat, mais dont on peut recenser tous les résultats possibles.
  Exemple 1 : lancer de deux dés.
  Exemple 2 : temps de désintégration d'un isotope radioactif.
- Ensemble fondamental : ensemble de tous les résultats possibles.
  Exemple 1 : $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$.
  Exemple 2 : $\Omega = [0, +\infty[$.

$\omega \in \Omega$: réalisation de l'expérience aléatoire.

Ensemble fondamental

- Expérience aléatoire : expérience dont on ne connaît pas le résultat, mais dont on peut recenser tous les résultats possibles.
  Exemple 1 : lancer de deux dés.
  Exemple 2 : temps de désintégration d'un isotope radioactif.
- Ensemble fondamental : ensemble de tous les résultats possibles.
  Exemple 1 : $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$.
  Exemple 2 : $\Omega = [0, +\infty[$.

$\omega \in \Omega$: réalisation de l'expérience aléatoire.
On s'intéresse aujourd'hui aux cas où Ω est au plus dénombrable.
On attaquera vendredi prochain les cas où Ω est infini non-dénombrable.

Événements

- Un événement A : un fait qui arrive ou pas selon le résultat d'une expérience aléatoire.
  Exemple 1 : $A =$"la somme des dés donne 7".
- On peut lui associer une partie de Ω :

$$A = \big\{ \omega \in \Omega\,,\ \text{l'événement se réalise si } \omega \text{ est tiré } \big\}$$

Exemple 1 : $A = \big\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\big\}$.

Ici (Ω au plus dénombrable), l'ensemble des événements est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilité

On quantifie la vraisemblance de chaque événement $A \in \mathcal{A}$ par un nombre entre 0 et 1, noté $\mathbb{P}(A)$.

Definition

Une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifie

1. La probabilité de l'événement certain Ω est 1 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille d'événements deux-à-deux disjoints $(A_i)_{i \in I}$, avec I au plus dénombrable,
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Probabilité

On quantifie la vraisemblance de chaque événement $A \in \mathcal{A}$ par un nombre entre 0 et 1, noté $\mathbb{P}(A)$.

Definition

Une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifie

1. La probabilité de l'événement certain Ω est 1 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille d'événements deux-à-deux disjoints $(A_i)_{i \in I}$, avec I au plus dénombrable,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple 1 : $\mathbb{P} =$ loi uniforme sur $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

$\hookrightarrow$ lien avec la combinatoire.
Si $A =$"la somme des dés donne 7", alors $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
But : Actualiser la probabilité d'un événement en présence d'information partielle.

Définition

Soient A et B deux événements, avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple 1 : $A =$"la somme des dés donne 7".
Si $B =$"le premier dé donne 4", alors $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$!
Si $A' =$"la somme des dés donne 6", alors $\mathbb{P}(A'|B) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{36} = \mathbb{P}(A')$.

Proposition

Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors $A \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité.

Probabilité conditionnelle

- Formule des probabilités totales : Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω (avec I au plus dénombrable et $A_i \in \mathcal{A}$) et $B \in \mathcal{A}$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Preuve : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(\cup_{i\in I}(B\cap A_i)\big) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i)$.

- Formule de Bayes : Si A, B sont des événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Preuve : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$.

L'histoire de poum la vache

Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test :

- si le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99,8% des cas.

- si le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99,6% des cas.

On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000.

Question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

L'histoire de poum la vache

Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test :

- si le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99,8% des cas.

- si le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99,6% des cas.

On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000.

Question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

Réponse : On note M l'événement "la vache testée est malade" et T^+ l'événement "le test est positif". On cherche $\mathbb{P}(M|T^+)$:

$$\mathbb{P}(M|T^+) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T^+)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^+|M^c)\mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}998\ 10^{-5}}{0{,}998\ 10^{-5}\ +\ (1-0{,}996)\ (1-10^{-5})},$$

soit $\mathbb{P}(M|T^+) = 0{,}25\ \%$.

L'histoire de poum la vache

Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test :

- si le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99,8% des cas.

- si le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99,6% des cas.

On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000.

Question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

Réponse : On note M l'événement "la vache testée est malade" et T^+ l'événement "le test est positif". On cherche $\mathbb{P}(M|T^+)$:

$$\mathbb{P}(M|T^+) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T^+)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^+|M^c)\mathbb{P}(M^c)}$$

$$= \frac{0{,}998\ 10^{-5}}{0{,}998\ 10^{-5}\ +\ (1-0{,}996)\ (1-10^{-5})},$$

soit $\mathbb{P}(M|T^+) = 0{,}25\ \%$. *Exercice : calculer* $\mathbb{P}(M|T^-)$*, avec* $T^- = {T^+}^c$*.*

Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque : Si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \text{ ssi } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Exemple 1 : $A =$"la somme des dés donne 7".
Si $B =$"le premier dé donne 4", alors A et B sont indépendants.
Si $A' =$"la somme des dés donne 6", alors A' et B sont dépendants.

Indépendance

Définition

n événements $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont indépendants si et seulement si, pour tous $k = 1, \ldots, n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$:

$$\mathbb{P}\big(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}\big) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

Exemple 1 : $A =$"la somme des dés donne 7", $B =$"le premier dé donne 4", $C =$"le second dé donne 3".
Alors A et B sont indépendants, B et C sont indépendants, A et C sont indépendants.
Mais A, B, C ne sont pas indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

ou

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = 1 \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$$

La ruine du joueur

- Un joueur joue à une suite de parties indépendantes. A chaque partie, il gagne 1 euro avec probabilité p et perd 1 euro avec probabilité $1-p$, avec $p \in]0,1[$.
- A l'instant initial, le joueur possède $k \in \mathbb{N}$ euros. Il se fixe comme objectif de repartir avec $a \in \mathbb{N}^*$ euros (avec $a \geq k$).
- Le jeu s'arrête lorsque le joueur atteint son objectif (atteindre la fortune a) ou bien lorsqu'il est ruiné (atteindre la fortune 0).
- On note

$$\pi_k = \mathbb{P}(R), \qquad R = \text{“le joueur est ruiné”}$$

La ruine du joueur

- On note $G_1 =$ "le joueur gagne la première partie".
  Si $k \in \{1, \ldots, a-1\}$, par la formule des probabilités totales :
  $$\begin{aligned} \pi_k = \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R|G_1)\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(R|G_1^c)\mathbb{P}(G_1^c) \\ &= \pi_{k+1}p + \pi_{k-1}(1-p) \end{aligned}$$
  De plus, $\pi_0 = 1$, $\pi_a = 0$.
- On peut résoudre l'équation aux différences, en notant que :
  $$\pi_{k+1} - \pi_k = \frac{1-p}{p}(\pi_k - \pi_{k-1})$$
- Si $p = 1/2$ (jeu équitable), alors
  $$\pi_k = 1 - \frac{k}{a}$$
- Si $p \neq 1/2$ (jeu non-équitable), alors
  $$\pi_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1}$$

La ruine du joueur

- Application : $p = 1/2$ (jeu équitable), $k = 100$, $a = 200$:

$$\mathbb{P}(R) = 1/2$$

- Application : $p = 1/2$ (jeu équitable), $k = 1$, $a = 2$:

$$\mathbb{P}(R) = 1/2$$

La ruine du joueur

- Application : $p = 1/2$ (jeu équitable), $k = 100$, $a = 200$:

$$\mathbb{P}(R) = 1/2$$

- Application : $p = 1/2$ (jeu équitable), $k = 1$, $a = 2$:

$$\mathbb{P}(R) = 1/2$$

- Application $k = 100$, $a = 200$, roulette ($p = 18/37$) :

$$\mathbb{P}(R) \simeq 0{,}9955$$

- Application $k = 1$, $a = 2$, roulette ($p = 18/37$) :

$$\mathbb{P}(R) \simeq 0{,}5135$$

Morale : Il faut tout miser d'un seul coup !

Lemme de Borel Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On définit

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$$

Il faut se souvenir que :

$\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω appartient à une infinité de A_n

Effectivement,

$$\begin{aligned}\omega \text{ appartient à une infinité de } A_n &\iff \forall p,\ \exists n \geq p \text{ tel que } \omega \in A_n \\ &\iff \omega \in \limsup_n A_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega \text{ appartient à un nombre fini de } A_n &\iff \exists p \text{ tel que } \omega \notin A_n\, \forall n \geq p \\ &\iff \omega \notin \limsup_n A_n\end{aligned}$$

Lemme de Borel Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On définit

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$$

Il faut se souvenir que :

$$\omega \in \limsup_n A_n \text{ ssi } \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n$$

Théorème

1. *Si la série* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, *alors* $\mathbb{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 0$.
   Avec probabilité 1, il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui se produisent.
2. *Si les événements* $(A_n)_n$ *sont indépendants, alors*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 1$$

Avec probabilité 1, il y a un nombre infini de A_n qui se produisent.

Lemme de Borel Cantelli

L'hypothèse d'indépendance est cruciale dans Borel-Cantelli 2 !
Exemple : $\Omega = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}$=probabilité uniforme.
On pose $A = \{0\}$ et $A_n = A$ pour tout n.
On a $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et bien sûr $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$,
alors que $\limsup_n A_n = A$ et $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1/2$.

Application de Borel-Cantelli 2

- Un joueur lance une pièce de monnaie. On veut montrer qu'il va finir par arriver à obtenir 100 fois de suite Pile.
- On note R l'événement "le joueur obtient 100 fois de suite Pile".
- On a $R \supset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $A_n =$"le joueur fait Pile lors des lancers $100n+1,\dots,100(n+1)$".
- Les A_n sont indépendants
- $\mathbb{P}(A_n) = 2^{-100}$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.
- Borel-Cantelli dit que $\mathbb{P}(R) = 1$. Mieux, presque sûrement (i.e. avec probabilité 1), le joueur réalise une infinité de fois des séries de 100 Piles.

Variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
Une variable aléatoire (réelle) est une quantité (nombre) aléatoire, dont la valeur n'est connue qu'à l'issue de l'expérience aléatoire.
Exemple 1 : S = somme des dés à l'issue du lancer de deux dés.

Définition

Une variable aléatoire discrète est une application $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble au plus dénombrable.
Sa loi est $\{p_x^X, x \in E\}$ avec

$$p_x^X = \mathbb{P}(X = x), \qquad \{X = x\} = \{\omega \in \Omega\,,\ X(\omega) = x\}$$

Exemple 1 : $E = \{2, \ldots, 12\}$ et $p_x^S = \frac{\min(x-1,13-x)}{36}$.
La loi d'une variable aléatoire discrète définit une probabilité P_X sur E :
Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} p_x^X$$

Lois discrètes usuelles

- Soit $p \in [0,1]$.
  Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: probabilité P sur $\{0,1\}$ telle que

$$P(\{1\}) = p \text{ et } P(\{0\}) = 1 - p$$

  On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour dire : X est une variable aléatoire discrète de loi $\mathcal{B}(p)$.
  Exemple : On lance une pièce et on pose $X = 1$ si on obtient pile, $X = 0$ sinon. On a $X \sim \mathcal{B}(1/2)$.

Lois discrètes usuelles

- Soit $p \in [0,1]$.
  Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: probabilité P sur $\{0,1\}$ telle que
  $$P(\{1\}) = p \text{ et } P(\{0\}) = 1 - p$$
  On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour dire : X est une variable aléatoire discrète de loi $\mathcal{B}(p)$.
  Exemple : On lance une pièce et on pose $X = 1$ si on obtient pile, $X = 0$ sinon. On a $X \sim \mathcal{B}(1/2)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.
  Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: probabilité P sur $\{0,\dots,n\}$ telle que
  $$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ pour } k \in \{0,\dots,n\}$$
  Exemple : On lance n pièces et on pose $S =$nombre de piles obtenus. On a $S \sim \mathcal{B}(n,1/2)$.
- Loi géométrique, loi de Poisson (voir poly).

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète réelle (i.e. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$).
L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

(sous réserve que la série converge absolument ou $E \subset \mathbb{R}^+$).
On a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x P_X(x)$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in E} \sum_{\omega, X(\omega)=x} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$= \sum_{x \in E} x \sum_{\omega, X(\omega)=x} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\omega, X(\omega)=x} \{\omega\} \Big) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x)$$

Espérance

- Propriété de transport :
  Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.
  Soit $\phi : E \to F \subset \mathbb{R}$.
  Alors $Y = \phi(X)$ est une variable aléatoire discrète. On a

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{y \in F} y p_y^Y = \sum_{x \in E} \phi(x) p_x^X$$

Espérance

- Propriété de transport :
  Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.
  Soit $\phi : E \to F \subset \mathbb{R}$.
  Alors $Y = \phi(X)$ est une variable aléatoire discrète. On a

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{y \in F} y p_y^Y = \sum_{x \in E} \phi(x) p_x^X$$

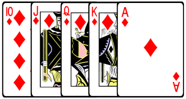
- Indépendance :
  Soient X_1 et X_2 deux variable aléatoires discrètes.
  On dit que X_1 et X_2 sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

  Résultat : X_1 et X_2 sont indépendantes ssi pour toutes fonctions à valeurs réelles ϕ_1 et ϕ_2 telles que $\mathbb{E}[|\phi_i(X_i)|] < \infty$, on a

$$\mathbb{E}\big[\phi_1(X_1)\phi_2(X_2)\big] = \mathbb{E}\big[\phi_1(X_1)\big]\mathbb{E}[\phi_2(X_2)\big]$$

Application de Borel-Cantelli 1



- Un joueur joue à une série de parties (indépendantes). A la $n$ème partie, il perd 1 euro avec probabilité $1-\frac{1}{1+n^2}$, il gagne n^2 euros avec probabilité $\frac{1}{1+n^2}$.
- C'est un jeu équitable, car le gain X_n à chaque partie est d'espérance nulle :

$$\mathbb{P}(X_n=-1)=1-\frac{1}{1+n^2}, \qquad \mathbb{P}(X_n=n^2)=\frac{1}{1+n^2}$$

$$\mathbb{E}[X_n]=-1\times\Big(1-\frac{1}{1+n^2}\Big)+n^2\times\frac{1}{1+n^2}=0$$

Le gain au bout de n parties est $G_n=\sum_{i=1}^n X_i$, d'espérance nulle aussi :

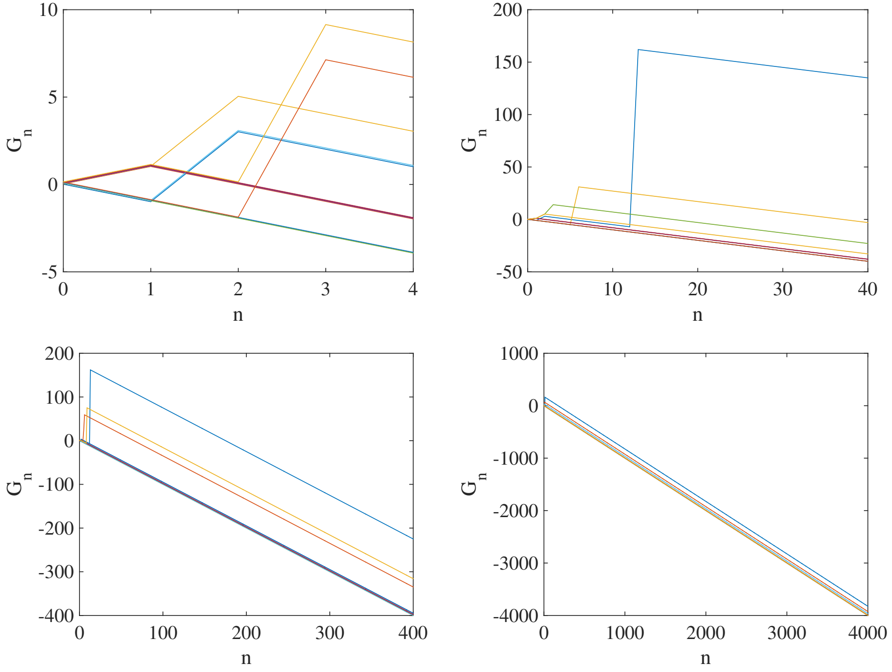
$$\mathbb{E}[G_n]=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]=0$$

Application de Borel-Cantelli 1

- On note $A_n =$"le joueur gagne la $n$ème partie ".
  On a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2+1}$, qui est sommable.
  Borel Cantelli dit que, presque sûrement, le joueur ne gagne qu'un nombre fini de fois.
  Au delà du dernier coup gagnant, le joueur perd 1 à chaque fois, donc son gain G_n tend vers $-\infty$.
- On a une situation où

$$\mathbb{E}[G_n] = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } G_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ presque sûrement}$$

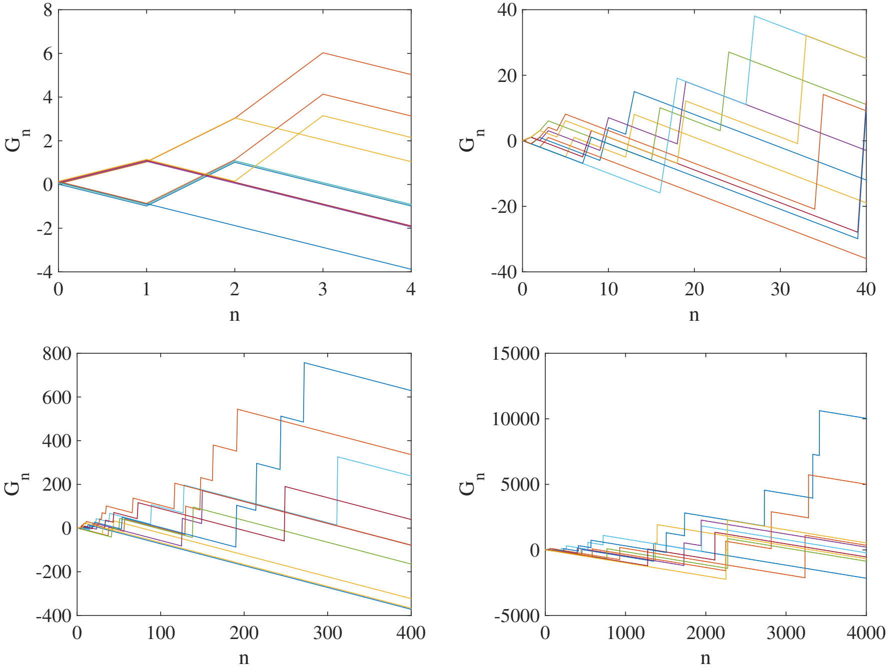
- Morale : il ne faut pas jouer à ce genre de jeu...



10
5
0
-5
0
1
2
3
4
G_n
n
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30
40
G_n
n
200
100
0
-100
-200
-300
-400
0
100
200
300
400
G_n
n
1000
0
-1000
-2000
-3000
-4000
0
1000
2000
3000
4000
G_n
n

Application de Borel-Cantelli 2

- La situation est beaucoup plus "neutre" lorsque :
  A la $n$ème partie, le joueur perd 1 euro avec probabilité $1 - \frac{1}{1+n}$, il gagne n euros avec probabilité $\frac{1}{1+n}$.
  On a toujours un jeu équitable, mais on gagne une infinité de fois presque sûrement (ici, on a besoin de l'hypothèse d'indépendance des parties).


G
n
8
6
4
2
0
-2
-4
0
1
2
3
4
n
G
n
40
20
0
-20
-40
0
10
20
30
40
n
G
n
800
600
400
200
0
-200
-400
0
100
200
300
400
n
G
n
15000
10000
5000
0
-5000
0
1000
2000
3000
4000
n

Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire entière (à valeurs dans $\mathbb{N}$). Sa loi est $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Définition

La fonction génératrice de X est définie par

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}\big[s^X\big] = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k \quad \textit{pour } s \in [0,1]$$

- La loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice : ϕ_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et

$$p_k = \frac{1}{k!}\phi_X^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{N}$$

- $\mathbb{E}[X] < \infty$ ssi ϕ_X est dérivable à gauche en 1 et alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k = \phi_X'(1)$$

Fonctions génératrices

- Si X_i sont indépendantes de fonctions génératrices ϕ_{X_i}, alors la fonction génératrice de $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ est

$$\phi_Z(s) = \mathbb{E}\big[s^{X_1+\cdots+X_n}\big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^n s^{X_i}\Big] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[s^{X_i}] = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(s)$$

Exemple :
Si $Z \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, alors Z a même loi que la somme $\sum_{i=1}^n X_i$ où les X_i sont des v.a. de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\phi_Z(s) = \phi_{X_1}(s)^n = \Big(\frac{1+s}{2}\Big)^n$$

Loi et espérance conditionnelles

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs dans E et $F \subset \mathbb{R}$.

Définition

On fixe $x \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est la probabilité définie sur F par :

$$P_y^{Y|X=x} = \mathbb{P}(Y = y|X = x) \qquad \forall y \in F$$

On suppose $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.
L'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$ vaut

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{y \in F} y P_y^{Y|X=x}$$

L'espérance conditionnelle de Y sachant X est définie comme la variable aléatoire discrète

$$\mathbb{E}[Y|X] = \Psi(X), \text{ avec } \Psi \text{ définie par } \Psi(x) = \mathbb{E}[Y|X = x].$$

Espérance emboîtée

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

(Equivalent de la formule des probabilités totales). Signifie :

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in E} \mathbb{E}[Y|X = x]\mathbb{P}(X = x)$$

Espérance emboîtée

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

(Equivalent de la formule des probabilités totales). Signifie :

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in E} \mathbb{E}[Y|X = x]\mathbb{P}(X = x)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big] &= \sum_{x \in E} \Psi(x)\mathbb{P}(X = x) \qquad \text{avec } \Psi(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] \\
&= \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y \in F} y\mathbb{P}(Y = y|X = x) \\
&= \sum_{y \in F} y \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x) \\
&= \sum_{y \in F} y\mathbb{P}(Y = y) \qquad \text{formule des probabilité totales} \\
&= \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

Exemple :
Un restaurant reçoit chaque jour un nombre aléatoire N de clients (de moyenne n).
Chaque client dépense une somme aléatoire X (de moyenne m), de manière indépendante.
La recette journalière R est :

$$R = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

La recette moyenne est :

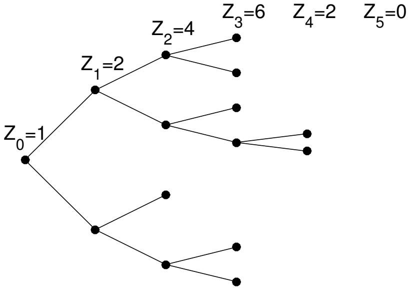
$$\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[R|N]\big]$$

Or $\mathbb{E}[R|N] = \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N} X_i|N\big] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i] = Nm$, donc

$$\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[R|N]\big] = \mathbb{E}[Nm] = \mathbb{E}[N]m = nm$$

Processus de Galton-Watson

Modèle de dynamique de population.
Motivation originale : survie de l'Empire britannique (en fait, survie des lignées des Lords).
Autres motivations : populations de bactéries en biologie, d'atomes en physique nucléaire.



Génération 0 : $Z_0 = 1$ individu.

Génération $n \mapsto n+1$:
Chacun des Z_{n-1} individus
a 0 enfant avec probabilité $1/2$
et 2 enfants avec probabilité $1/2$,
de manière indépendante

Sachant Z_{n-1}, $Z_n = 2\times$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(Z_{n-1}, 1/2)$.

Sachant Z_{n-1}, $Z_n/2 =$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(Z_{n-1}, 1/2)$

- La taille de la population est constante en moyenne :

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]\big] = 2\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\frac{Z_n}{2}|Z_{n-1}]\Big] = 2\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}Z_{n-1}\Big] = \mathbb{E}[Z_{n-1}]$$

- La fonction génératrice de Z_n vérifie :

$$\phi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}\big[s^{Z_n}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[s^{Z_n}|Z_{n-1}\big]\big]$$

Donc

$$\phi_{Z_n}(s) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[s^{2\frac{Z_n}{2}}|Z_{n-1}\big]\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1+s^2}{2}\Big)^{Z_{n-1}}\Big]$$

$$\phi_{Z_n}(s) = \phi_{Z_{n-1}} \circ \phi(s), \text{ avec } \phi(s) = \frac{1+s^2}{2}$$

$$\phi_{Z_n}(s) = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}(s), \text{ avec } \phi(s) = \frac{1+s^2}{2}$$

- On retrouve

$$\mathbb{E}[Z_n] = \phi'_{Z_n}(1) = \phi'_{Z_{n-1}}(\phi(1))\phi'(1) = \phi'_{Z_{n-1}}(1)\phi'(1) = \mathbb{E}[Z_{n-1}]$$

On s'intéresse à l'extinction de la lignée :

$$E_n = \{Z_n = 0\}, \quad \pi_n = \mathbb{P}(E_n)$$

On a en fait (car $Z_p = 0 \Longrightarrow Z_n = 0 \ \forall n \geq p$) :

$$E_n = \cup_{p \leq n} \{Z_p = 0\}$$

Donc E_n est une suite croissante d'événements, $\pi_n = \mathbb{P}(E_n)$ est une suite croissante et majorée de réels, donc convergente.
Or

$$\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{E}[0^{Z_n}] = \phi_{Z_n}(0) = \phi \circ \phi_{Z_{n-1}}(0) = \phi(\pi_{n-1})$$

Donc la limite π_∞ de π_n vérifie $\pi_\infty = \phi(\pi_\infty)$, donc $\pi_\infty = 1$.
On est dans une situation où

$$\mathbb{E}[Z_n] = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Z_n = 0 \text{ presque sûrement.}$$

On peut généraliser au cas où la loi du nombre de descendants par individu est arbitraire, de fonction génératrice ϕ. On a alors

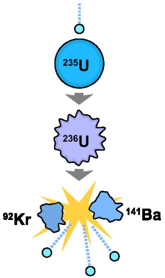
$$\phi_{Z_n}(s) = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}(s)$$

On note $k = \mathbb{E}[Z_1] = \phi'(1)$ le nombre moyen de descendants par individu. On a $\mathbb{E}[Z_n] = k^n$.

- Si $k < 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
- Si $k = 1$ et $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
- Si $k > 1$, alors $\pi_\infty < 1$ est la plus petite solution de $\phi(s) = s$.

Si au lieu de $Z_0 = 1$ on a $Z_0 \gg 1$, alors la proportion des lignées qui vont s'éteindre est π_∞.

Exemple : Un atome fissionne en donnant trois neutrons.



Chaque neutron produit a une probabilité p de rentrer en collision avec un autre atome, qui fissionne à son tour.
La loi du nombre de descendants est $\mathcal{B}(3, p)$. Ici le nombre moyen de descendants est $k = 3p$.
Si $p = 1/3$, alors réaction en chaîne stable + extinction.
Si $p > 1/3$, alors boum.
Remarque : La réalité (réactions nucléaires) n'est pas aussi simple.