Université Paris Diderot Année 2014-2015
L2 Maths - Maths-Info **PS4, partiel**

Les quatre exercices sont indépendants. Le barème approximatif est 4.5/5/5.5/5. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.

Exercice 1 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A, B, C trois événements indépendants de probabilités différentes de 0 et de 1.

1. Montrez que A et $B \cup C$ sont indépendants.
2. Montrez que $\mathbb{P}(B \cup C)$ est strictement inférieure à 1.

Exercice 2 Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4. Il est relu par une suite de lecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur non-corrigée est corrigée avec une probabilité $p \in]0,1[$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres. Les relectures sont indépendantes les unes des autres.
Indication : On pourra considérer, pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $A_{n,j}$: « l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ème relecture » et l'événement B_n : « le livre est corrigé à l'issue de la n-ème relecture (c'est-à-dire qu'il ne reste aucune erreur) ».

1. Quelle est la probabilité que l'erreur n^o 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ème lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre ne soit pas corrigé à l'issue de la n-ème lecture ?
3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à α ?

Exercice 3 Soit une urne contenant r boules rouges et b boules blanches. On tire trois boules dans cette urne en procédant comme suit :

— La première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.
— la deuxième boule tirée est remise dans l'urne si sa couleur est la même que celle de la première, et n'est pas remise dans le cas contraire.

Indication : On pourra considèrer, pour tout $j = 1, 2, 3$, l'événement R_j : « le j-ème tirage donne une boule rouge ».

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : « avoir deux boules rouges aux deux premiers tirages » ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement B : « obtenir au moins une boule blanche sur les trois tirages » ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement C : « la deuxième boule tirée n'est pas remise dans l'urne » ?
4. Sachant que que la deuxième boule tirée n'est pas remise dans l'urne, quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

Exercice 4 Alphonse et Bernard tirent au pistolet sur une cible suivant les règles suivantes :

— ils tirent chacun leur tour. Le premier qui atteint la cible a gagné ;
— lorsqu'il tire, Alphonse atteint la cible avec la probabilité a $(0 < a < 1)$ et il la rate avec la probabilité $\bar{a} = 1 - a$;
— lorsqu'il tire, Bernard atteint la cible avec la probabilité b $(0 < b < 1)$ et il la rate avec la probabilité $\bar{b} = 1 - b$;
— Alphonse tire le premier.

Ainsi, Alphonse (resp. Bernard) n'effectue que des tirs de rang impair (resp. pair).
On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les événements A_{2n-1} : « Alphonse gagne à l'issue du tir n$^\circ$ $2n-1$ », B_{2n} : « Bernard gagne à l'issue du tir n$^\circ$ $2n$ », A : « Alphonse gagne » et B : « Bernard gagne ».

1. Calculer, en fonction de a et b, les probabilités des événements A_1, B_2 et A_3. Plus généralement, calculer $\mathbb{P}(A_{2n-1})$ et $\mathbb{P}(B_{2n})$ pout tout $n \geqslant 1$.
2. En déduire les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. Vérifier la relation $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$.
3. On suppose que $a = 1/3$. Quelle est la valeur de b telle que la partie soit équilibrée (c'est-à-dire telle que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$) ?

Solutions

Exercice 1 1. Il faut montrer que $\mathbb{P}(A\cap(B\cup C))=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cup C)$.
La formule de base est $\mathbb{P}(A_1\cup A_2)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)$ valable pour tout couple d'événements A_1 et A_2.
On a $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap(B\cup C)) &= \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A\cap C))\\ &= \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C))\\ &\overset{\text{par indépendance}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\\ &= \mathbb{P}(A)\left[\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\right]\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B\cup C)$, ce qui complète la preuve.

2. On a $\mathbb{P}(B\cup C)=\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)[1-\mathbb{P}(B)]$, donc

$$1-\mathbb{P}(B\cup C)=[1-\mathbb{P}(B)][1-\mathbb{P}(C)]$$

Comme $\mathbb{P}(B)<1$ et $\mathbb{P}(C)<1$, ceci montre que $1-\mathbb{P}(B\cup C)>0$, et donc $\mathbb{P}(B\cup C)<1$.

Exercice 2 *1.* On note $A_{n,1}$ l'événement " l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée à l'issue de la n-ème relecture". Cet événement se produit si les n premières relectures n'ont pas corrigé l'erreur en question, donc :

$$\mathbb{P}(A_{n,1})=(1-p)^n$$

2. Pour $j=1,...,4$, on note $A_{n,j}$ l'événement " l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ème relecture". On a

$$\mathbb{P}(A_{n,j})=(1-p)^n$$

et les $(A_{n,j})_{j=1,...,4}$ sont indépendants.

On note B_n l'événement "le livre est corrigé à l'issue de la n-ème relecture". On a $B_n=\cap_{j=1}^4 A_{n,j}^c$, et comme les événements $(A_{n,j}^c)_{j=1,...,4}$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}(B_n)=\prod_{j=1}^4\mathbb{P}(A_{n,j}^c)=\prod_{j=1}^4(1-\mathbb{P}(A_{n,j}))=(1-(1-p)^n)^4$$

Donc l'événement $B_n^c=$"le livre n'est pas corrigé à l'issue de la n-ème relecture" a pour probabilité

$$\mathbb{P}(B_n^c)=1-\mathbb{P}(B_n)=1-(1-(1-p)^n)^4$$

3. On recherche les n tels que $\mathbb{P}(B_n)\geqslant\alpha$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n)\geqslant\alpha &\iff (1-(1-p)^n)^4\geqslant\alpha\iff 1-(1-p)^n\geqslant\alpha^{1/4}\\ &\iff (1-p)^n\leqslant 1-\alpha^{1/4}\iff n\ln(1-p)\leqslant\ln(1-\alpha^{1/4})\\ &\iff n\geqslant\frac{\ln(1-\alpha^{1/4})}{\ln(1-p)}\end{aligned}$$

Exercice 3 On note $R_j=$"le j-ème tirage donne une boule rouge".

1. On note $A=$"on obtient deux boules rouges aux deux premiers tirages".
On a $A=R_1\cap R_2$, donc

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)=\frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}$$

2. On note B ="on obtient au moins une boule blanche sur les trois tirages".
   On a $B^c = R_1 \cap R_2 \cap R_3$, donc

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{r}{r+b}\left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2$$

   et bien sûr $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$.
3. On note C ="la deuxième boule tirée n'est pas remise dans l'urne".
   On a $C = (R_1 \cap R_2^c) \cup (R_1^c \cap R_2)$. L'union est disjointe, donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2^c) + \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2^c|R_1) + \mathbb{P}(R_1^c)\mathbb{P}(R_2|R_1^c) = \frac{2rb}{(r+b)(r+b-1)}$$

4. $$\mathbb{P}(R_2|C) = \frac{\mathbb{P}(R_2 \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(R_1^c \cap R_2)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 On peut prendre comme ensemble fondamental l'ensemble $\{\omega_1, \omega_2, ...\} \cup \{\omega_\infty\}$ où ω_j représente le résultat $RR...RT$ où les $j-1$ premiers tirs sont ratés et le j^{eme} est réussi. ω_∞ est l'événement $RRR...$ où tous les tirs sont ratés.

1. On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les événements suivants :

$$\begin{aligned} A_{2n-1} &= \{\text{Alphonse gagne à l'issue du tir n}^\circ\, 2n-1\} \,, \\ B_{2n} &= \{\text{Bernard gagne à l'issue du tir n}^\circ\, 2n\} \,. \end{aligned}$$

On trouve successivement (formule du conditionnement multiple) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= a \,, \\ \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_2 \cap A_1^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(B_2|A_1^c) = (1-a)b \,, \\ \mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_3 \cap B_2^c \cap A_1^c) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(B_2^c|A_1^c)\mathbb{P}(A_3|A_1^c \cap B_2^c) = (1-a)(1-b)a \,, \\ \mathbb{P}(A_{2n-1}) &= [(1-a)(1-b)]^{n-1}\, a \,, \\ \mathbb{P}(B_{2n}) &= [(1-a)(1-b)]^{n-1}\, (1-a)b \,. \end{aligned}$$

2. On considère ensuite les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Alphonse gagne}\} \,, \\ B &= \{\text{Bernard gagne}\} \,. \end{aligned}$$

On a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{2n-1}$, et les A_n sont disjoints. Donc :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n-1}) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} \,.$$

De même :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_{2n}) = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} \,.$$

C'est alors un simple calcul de vérifier que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$.

3. Si $a = 1/3$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ *ssi* $b = 1/2$.